Aufgabe 1

(i)

Es ist

$\{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \dots\}$.

Daher schlagen wir die Notation $2\mathbb{N}$ vor.

(ii)

Es ist

$\{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 3 - 1, 2 \cdot 4 - 1, \dots\}$.

Deshalb schlagen wir die Notation $2\mathbb{N} - 1$ vor.

(iii)

Da die genannte Menge als

$\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

geschrieben werden kann, schlagen wir die Notation $x^{\mathbb{Z}}$ vor.

(iv)

Die Menge der positiven reellen Zahlen lässt sich als

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

schreiben. Daher schlagen wir die Notation $\mathbb{R}_{>0}$ vor.

(v)

Die genannte Menge lässt sich als

$\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b = 3^n$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$

schreiben. Deshalb schlagen wir die Notation $\frac{\mathbb{Z}}{3^{\mathbb{N}}}$ vor.

Aufgabe 2

A	B	C	$A \lor B$	$A \land B$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	(i) $(A \lor B) \Rightarrow C$	(ii) $(\neg A) \lor (\neg B) \lor C$	(iii) $(A \land B) \lor C$	(iv) $(A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C)$	(v) $\neg((A \lor B) \land (\neg C))$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	f	f	f	w	f	f
w	f	w	w	f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	w	w	f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w	f	w	f	w	f
f	w	f	w	f	w	f	f	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w	w	w	w	w	w	w
f	f	f	f	f	w	w	w	w	f	w	w

Für (v): $\neg((A \lor B) \land (\neg C)) \overset{2.4}{\Leftrightarrow} \neg(A \lor B) \lor \neg(\neg C) \overset{2.4}{\Leftrightarrow} \neg(A \lor B) \lor C$

Somit sind (i) und (v), und (ii) und (iv) äquivalent zueinander. Alle anderen Paare von Aussagen sind nicht äquivalent zueinander.

Aufgabe 3

(i)

Es sind

$P(3,6) = 6+3 = 9 = \underset{\sim}{3^2}$
Quadratzahl

und

$Q(6,3) = 6-3 = \underset{\sim}{3}.$
Primzahl

Somit können wir $a = 3$ und $b = 6$ setzen.

(ii)

Es sind

$P(6,10) = 6+10 = 16 = \underset{\sim}{4^2},$
Quadratzahl

$Q(10,3) = 10-3 = \underset{\sim}{7}$
Primzahl

und

$P(3,6) = 3+6 = 9 = \underset{\sim}{3^2}.$
Quadratzahl

Somit können wir $a = 6$, $b = 10$ und $c = 3$ wählen.

(iii)

Es sind

$P(9,7) = 9+7 = 16 = \underset{\sim}{4^2},$
Quadratzahl

$Q(9,7) = 9-7 = \underline{2}$
Primzahl

und

$Q(14,9) = 14-9 = \underset{\sim}{5}.$
Primzahl

Wir wählen daher $a = 9$ und $b = 7$.

Aufgabe 4

(i)

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a,b,c \in \mathbb{N} : n = a^2 + b^2 + c^2$

(ii)

$\neg(\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a,b,c \in \mathbb{N} : n = a^2 + b^2 + c^2)$

$\Updownarrow$ 2.13

$\exists n \in \mathbb{N}\ \neg(\exists a,b,c \in \mathbb{N} : n = a^2 + b^2 + c^2)$

$\Updownarrow$ 2.13

$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall a,b,c \in \mathbb{N} : \neg(n = a^2 + b^2 + c^2)$

$\Updownarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall a,b,c \in \mathbb{N} : n \neq a^2 + b^2 + c^2$

(iii)

Sind $a,b,c \in \mathbb{N}$, so ist
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Somit lässt sich die Zahl $1 \in \mathbb{N}$ nicht als Summe dreier Quadratzahlen schreiben, sodass A falsch ist.