

Aufgabe 1

(i)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -7 & 1 \end{array} \right)$$

(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\substack{\text{II} - \text{I} \\ \text{III} + 3\text{I}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \cdot (-1)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{III} + 4\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \cdot \frac{1}{3}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\substack{\text{I} - 2\text{III} \\ \text{II} - \text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} + 2\text{II}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Also ist die Lösungsmenge durch

$$\{(-14, -3, 5)\}$$

gegeben.

Aufgabe 2

(i)

Seien $a, b \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} K_3(aT+b) &= K_3(b \cdot 1 + a \cdot T) = b K_3(1) + a K_3(T) \\ &= b e_1 + a e_2 \\ &= (b, a) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K_c(aT+b) &= K_c\left((-b) \cdot (-1) + \left(\frac{a}{2}\right) \cdot 2T\right) = (-b) K_c(-1) + \frac{a}{2} K_c(2T) \\ &= (-b) e_1 + \frac{a}{2} e_2 \\ &= \left(-b, \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

(ii)

Es ist

$$K_c(f(1)) = K_c(0) \stackrel{(i)}{=} (0, 0)$$

und

$$K_c(f(T)) = K_c(1) \stackrel{(i)}{=} (-1, 0).$$

Also ist

$${}_c C_f{}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii)

Wir wollen ${}_c C_{id}{}_3$ und ${}_3 C_{id}{}_c$ bestimmen. Dafür:

$$K_c(id(1)) = K_c(1) = (-1, 0)$$

$$K_c(id(T)) = K_c(T) = \left(0, \frac{a}{2}\right)$$

Somit ist

$${}_c C_{id}{}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$${}_3 C_{id}{}_c \stackrel{\text{Vorl.}}{=} {}_c C_{id}{}_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \stackrel{\text{Vorl.}}{=} \stackrel{\text{Aufg. 4}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(i)

Es ist $1 \leq \text{rg}(A) \leq n$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & & & \\ | & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rg} = 1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rg} = 2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rg} = n-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rg} = n}$$

$\text{rg}(A) = 0$ ist nicht möglich, da auf jeden Fall Vektoren aus $K^n \setminus \{0\}$ im Bild liegen.

(ii)

Da $\text{rg}(A) = n$ ist, kann auch in jeder Spalte von A nur genau eine 1 sein. Somit erhalten wir A^{-1} nur vermöge von Zeilenumtauschungen

$$(A | I_n) \rightarrow (I_n | A^{-1})$$

Ist $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ die Bijektion, welche die

Zeilen von $I_n = (e_1 | \dots | e_n)$ so vertauscht, dass A entsteht, so sorgt σ^{-1} genau für die Positionen der 1en in A^{-1} . Denn bei den Zeilenvertauschungen müssen wir ja genau so vertauschen, dass wir σ rückgängig machen. Somit:

Ist

$$\sigma(l\text{-te Zeile}) = l\text{-te Zeile},$$

so

$$\sigma^{-1}(l\text{-te Zeile}) = l\text{-te Zeile}$$

für die $1 \leq l, l \leq n$. Also können wir die 1en in A^{-1} finden.

Aufgabe 4

Fall 1: $a = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{I}} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Fall 1.1: $c = 0$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Rang ≤ 1 , sd.
die Matrix nicht
invertierbar ist.
Zudem $ad - bc = 0 - 0 = 0$

Fall 1.2: $c \neq 0$

Dann hat obige Matrix genau
vollen Rang, wenn $b \neq 0$ ist.
Hier ist dann auch $ad - bc = -bc$ genau
dann nicht Null, wenn $b \neq 0$ ist.

Fall 2: $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} - \frac{c}{a} \text{I}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

Wie oben ^{hat} diese Matrix genau dann
vollen Rang, wenn $d - \frac{bc}{a} \neq 0$ ist, d.h. wenn
 $ad - bc \neq 0$ ist.

Also ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ genau dann invertierbar,
wenn $ad - bc \neq 0$ ist.