

Aufgabe 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{II} + \text{III} \\ \text{I} - 2\text{III} \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= A^{-1}$$

Aufgabe 2

= 25

(i)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} + 2\text{I} \\ \text{III} - 4\text{I} \\ \text{IV} + 2\text{I} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} + \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} - 6\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$

Somit

$$\det(A) = \underbrace{(-1)^2}_{=1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} = 25$$

↑
obere Δ's-Matrix

(ii)

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Entw.} \\ = \\ \text{2. Zeile} \end{array} \begin{aligned} &= (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -(2+1) + 2(\underbrace{6+4-2+6}_{=14}) \\ &= -3 + 28 \end{aligned} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es ist

$$\det(A_t) = \det \begin{pmatrix} 2t & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2t \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Entw.}}{=} \underbrace{(-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2t & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2t \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{2. Spalte} \\ = 1}} + \underbrace{(-1)^{3+4} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2t & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2t \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{= -2}$$

$$= 2t + 4t - 2 - (-1) - (-8t^2) - (-2) - 2(-6t + 4t + 2 - (-1) - 8t^2 - 6)$$

$$= 14t + 1 - 2(-8t^2 - 2t - 3)$$

$$= 8t^2 + 6t + 1 - 2(-8t^2 - 2t - 3)$$

$$= 24t^2 + 10t + 7$$

Somit ist A_t genau dann invertierbar, wenn Nullstellen von $24t^2 + 10t + 7 = 24(t^2 + \frac{5}{12}t + \frac{7}{24})$ ist. Daher bestimmen wir nun die

$$t_{1/2} = -\frac{5}{24} \pm \sqrt{\frac{25}{24^2} - \frac{7}{24}}$$

< 0

Das Polynom $24t^2 + 10t + 7$ besitzt also keine reellen Nullstellen. Somit ist A_t stets invertierbar.

Aufgabe 4

Ne, denn dann müsste für Matrizen
 $A, A', B, B' \in K^{n \times n}$ mit $\det(A) = \det(A')$
und $\det(B) = \det(B')$ auch die Gleichheit

$$\det(A+B) = \det(A'+B')$$

folgen. Dies ist aber nicht so:

$$K = \mathbb{R}, n = 2$$

$$A = I_2 = A', \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det(A) = 1 = \det(A')$ und $\det(B) = 0 = \det(B')$,
aber

$$\det(A+B) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

und

$$\det(A'+B') = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$$