

Aufgabe 1

(i)

$$X_{A_1}(T) = \det(T \cdot I_3 - A_1) = \det \begin{pmatrix} T - \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & T + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & T \end{pmatrix} = \underbrace{(T - \frac{1}{2})(T + \frac{1}{2})T - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(T + \frac{1}{2})}_{T^2 - \frac{1}{4}} - \frac{3}{4}T - \frac{1}{2}(T - \frac{1}{2})$$

$$= T^3 - \frac{1}{4}T - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}T + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}T - \frac{1}{2}T + \frac{1}{4}$$

$$= T^3 - T$$

(ii)

$$X_{A_2}(T) = \det(T \cdot I_3 - A_2) = \det \begin{pmatrix} T - 1 & 2 & -1 \\ -2 & T - 1 & 1 \\ -2 & -1 & T + 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(T - 1)^2(T + 1) - 4 - 2 - 2(T - 1) + 4(T + 1) + T - 1}_{T^3 - 2T + 1}$$

$$= T^3 - 2T^2 + T + T^2 - 2T + 1 - 7 - 2T + 2 + 4T + 4 + T$$

$$= T^3 - T^2 + 2T$$

(iii)

$$X_{A_3}(T) = \det(T \cdot I_3 - A_3) = \det \begin{pmatrix} T - \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & T - \frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & T - 2 \end{pmatrix} = \underbrace{(T - \frac{5}{2})^2(T - 2) - \frac{1}{4}(T - 2)}_{T^3 - 5T + \frac{25}{4}}$$

$$= T^3 - 5T^2 + \frac{25}{4}T - 2T^2 + 10T - \frac{25}{2} - \frac{1}{4}T + \frac{1}{2}$$

$$= T^3 - 7T^2 + 16T - 12$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 \chi_{A_u}(T) &= \det(T \cdot I_3 - A_u) = \det \begin{pmatrix} T+7 & -6 & -6 \\ 15 & T-14 & -7 \\ -3 & 3 & T-4 \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{(T+7)(T-14)(T-4)}_{T^3 - 7T^2 - 98T - 98} - 3 \cdot 6 \cdot 15 - 3 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 6 \cdot (T-14) \\
 &\quad + 6 \cdot 15(T-4) + 3 \cdot 7(T+7) \\
 &= T^3 - 7T^2 - 98T - 4T^2 + 28T + 392 - 270 - 126 - 18T \\
 &\quad + 252 + 90T - 360 + 21T + 147 \\
 &= T^3 - 11T^2 + 23T + 35
 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
 \chi_{A_s}(T) &= \det(T \cdot I_3 - A_s) = \det \begin{pmatrix} T-5 & 2 & 2 \\ -12 & T+5 & 8 \\ 6 & -3 & T-6 \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{(T-5)(T+5)(T-6)}_{T^3 - 25T - 25} + 96 + 72 - 12(T+5) + 24(T-5) \\
 &\quad + 24(T-6) \\
 &= T^3 - 25T - 6T^2 + 150 + 168 - 12T - 60 + 24T \\
 &\quad - 120 + 24T - 144 \\
 &= T^3 - 6T^2 + 11T - 6
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Da

$$2 \cdot 1^5 - 11 \cdot 1^4 + 16 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 9 = 0,$$

ist 1 eine Nullstelle von f . Nun machen wir eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} 2T^5 - 11T^4 + 16T^3 + 2T^2 - 18T + 9 : T - 1 = 2T^4 - 9T^3 + 7T^2 + 9T - 9 \\ \underline{-(2T^5 - 2T^4)} \\ -9T^4 + 16T^3 \\ \underline{-(-9T^4 + 9T^3)} \\ 7T^3 + 2T^2 \\ \underline{-(7T^3 - 7T^2)} \\ 9T^2 - 18T \\ \underline{-(9T^2 - 9T)} \\ -9T + 9 \\ \underline{-(-9T + 9)} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Es ist also } f = (T-1) \underbrace{(2T^4 - 9T^3 + 7T^2 + 9T - 9)}_{=g}$$

Da

$$2 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 9 = 0,$$

ist 1 eine Nullstelle von g . Diese Nullstelle spalten wir nun ab:

$$\begin{array}{r} 2T^4 - 9T^3 + 7T^2 + 9T - 9 : T - 1 = 2T^3 - 7T^2 + 9 \\ \underline{-(2T^4 - 2T^3)} \\ -7T^3 + 7T^2 \\ \underline{-(-7T^3 + 7T^2)} \\ 0 + 9T - 9 \\ \underline{-(9T - 9)} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Somit also } g = (T-1) \underbrace{(2T^3 - 7T^2 + 9)}_{=h}.$$

Da

$$2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 9 = 0,$$

ist -1 eine Nullstelle von h . Nun ist

$$2T^3 - 7T^2 + 9 : T+1 = 2T^2 - 9T + 9$$

$$\begin{array}{r} -(2T^3 + 2T^2) \\ \hline -9T^2 + 9 \\ -(-9T^2 - 9T) \\ \hline 9T + 9 \\ -(9T + 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Also ist } h = (T+1) \underbrace{(2T^2 - 9T + 9)}_{2(T^2 - \frac{9}{2}T + \frac{9}{2})}.$$

Wir wenden nun die pq-Formel an:

$$\begin{aligned} T_{1/2} &= \frac{9}{4} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{81}{16} - \frac{72}{16}}_{\frac{9}{16}}} = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{4} \\ &= \begin{cases} 3 \\ \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$f = 2(T-1)^2(T+1)(T-3)(T-\frac{3}{2}).$$

Aufgabe 3

Wir müssen die reellen Nullstellen von $\chi_{A_1}(T)$, $\chi_{A_2}(T)$ und $\chi_{A_3}(T)$ bestimmen:

Für A_1 :

$$\chi_{A_1}(T) \stackrel{\text{Aufg. 1}}{=} T^3 - T = T(T^2 - 1) = T(T+1)(T-1)$$

Die Matrix A_1 besitzt also die Eigenwerte 0, 1 und -1.

Für A_2 :

$$\chi_{A_2}(T) \stackrel{\text{Aufg. 1}}{=} T^3 - T^2 + 2T = T(T^2 - T + 2)$$

Mittels pq-Formel erhalten wir

$$T_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} - 2}_{< 0}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Somit besitzt A_2 nur den Eigenwert 0.

Für A_3 :

Da

$$\underbrace{2^3}_8 - \underbrace{7 \cdot 2^2}_{28} + \underbrace{16 \cdot 2}_{32} - 12 = 0,$$

ist 2 eine Nullstelle von $\chi_{A_3}(T)$. Nun machen wir eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} T^3 - 7T^2 + 16T - 12 : T - 2 = T^2 - 5T + 6 \\ \underline{-(T^3 - 2T^2)} \\ -5T^2 + 16T \\ \underline{-(-5T^2 + 10T)} \\ 6T - 12 \\ \underline{-(6T - 12)} \\ 0 \end{array}$$

Somit ist

$$\chi_{A_3}(T) = (T - 2)(T^2 - 5T + 6).$$

Vermöge der pq-Formel erhalten wir

$$T_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{25}{4} - 6}_{\frac{1}{4}}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Also besitzt A_3 die Eigenwerte 2 (mit Vielfachheit 2) und 3.

Da A_1 paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt, ist A_1 diagonalisierbar.

Die Matrix A_2 kann nicht diagonalisierbar sein, da $\chi_{A_2}(T)$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

Über die Diagonalisierbarkeit von A_3 können wir an dieser Stelle noch nichts sagen.

Aufgabe 4

(i)

Es ist nur noch die Diagonalisierbarkeit von A_3 zu klären. Dazu berechnen wir die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 2$:

Da

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

hat die Matrix

$$2 \cdot I_3 - A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Rang 1, sodass $\dim(\ker(2I_3 - A_3)) = 2$ gilt.
Somit ist die Matrix A_3 diagonalisierbar.

< (ii)

Wir diagonalisieren zunächst A_1 . Dazu berechnen wir Basen der Eigenräume:

$\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} - \frac{3}{2} \text{I}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{II}]{\text{III} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \ker(0 \cdot I_3 - A_1) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{2}x - y - z = 0 = -2y + z\} \\ &= \{(x, y, -2y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{2}x + y = 0\} \\ &= \{(x, \frac{1}{2}x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, \frac{1}{2}, -1) \rangle \end{aligned}$$

und $((1, \frac{1}{2}, -1))$ ist eine Basis dieses Vektorraumes.

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} + \frac{3}{2} \text{I}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \ker(I_3 - A_1) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x - y - z = 0 = -2z = 2z\} \\ &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x - y = 0\} \\ &= \{(x, \frac{1}{2}x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, \frac{1}{2}, 0) \rangle \end{aligned}$$

und $((1, \frac{1}{2}, 0))$ ist eine Basis dieses Vektor-
raumes.

$$\lambda = -1:$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} + \frac{1}{2}\text{I} \\ \text{III} + \frac{1}{2}\text{I} \end{array} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{III} - \frac{1}{2}\text{II} \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \ker(-I_3 - A_\lambda) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{3}{2}x - y - z = 0 = -y - z\} \\ &= \{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{3}{2}x = 0\} \\ &= \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0, 1, 1) \rangle \end{aligned}$$

und $((0, 1, 1))$ ist eine Basis dieses Vektor-
raumes.

Nun betrachten wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen S^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - \frac{1}{2}\text{I} \\ \sim \\ \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{III} + \text{II} \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} - \text{III} \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \leftrightarrow \text{III} \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{S^{-1}}$$

Wir erhalten die Diagonalmatrix

$$S^{-1}A_\lambda S = S^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nun diagonalisieren wir A_2 :

$$\lambda = 2:$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} - \frac{1}{2}\text{I} \\ \sim \\ \text{III} - \frac{3}{2}\text{I} \end{matrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\ker(2I_3 - A_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{2}x - y = 0\}$$

$$= \{(x, -\frac{1}{2}x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \underbrace{((1, -\frac{1}{2}, 0), (0, 0, 1))}_{\text{offenbar linear unabhängig}}$$

und $((1, -\frac{1}{2}, 0), (0, 0, 1))$ ist eine Basis dieses Vektorraumes.

$$\lambda = 3:$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} + \frac{1}{2}\text{I} \\ \sim \\ \text{III} + \frac{3}{2}\text{I} \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} \leftrightarrow \text{III} \\ - \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\ker(3I_3 - A_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x - y = 0 = -3y + z\}$$

$$= \{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x - y = 0\}$$

$$= \{(x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle$$

und $((1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ ist eine Basis dieses Vektorraumes.

Nun setzen wir

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

und bestimmen T^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} + \frac{1}{2}\text{I} \\ \sim \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} - \text{II} \\ \sim \\ \text{III} - \frac{3}{2}\text{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \leftrightarrow \text{III} \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{T^{-1}}$$

Wir erhalten die Diagonalmatrix

$$T^{-1}A_3T = T^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$