

# Aufgabe 1

(i)

Es ist

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq 20\} = \{1, 2, 3\}.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \end{array}$$

Somit enthält obige Menge drei Elemente.

(ii)

Es ist

$$\{\heartsuit, 1, 2, 3, 2, 1, \diamond\} = \{1, 2, 3, \heartsuit, \diamond\}.$$

In diesem Fall enthält die Menge also fünf Elemente.

(iii)

Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}. \end{aligned}$$

Somit sind es vier Elemente.

(iv)

Die Menge  $\{1, 2, 12, \{1, 2\}\}$  ~~enthält vier Elemente.~~

(v)

Es ist

$$\begin{aligned} \{\{1, 2, 3\}, \{3, 2, 1\}\} &= \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \\ &= \{\{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Somit enthält diese Menge ein Element.



## Aufgabe 2

Es sind

$$b_0 = a_1 = 4,$$

$$b_1 = a_{b_0} = a_4 = 2,$$

$$b_2 = a_{b_1} = a_2 = 3,$$

$$b_3 = a_{b_2} = a_3 = 5,$$

$$b_4 = a_{b_3} = a_5 = 1$$

und

$$b_5 = a_{b_4} = a_1 = 4.$$

Da die Folge der  $b_n$ 's rekursiv definiert ist, und  $b_0 = b_5$  gilt, ist die Folge der  $b_n$ 's 5-periodisch. Somit ist

$$b_{\underbrace{000000000}_{\text{Vielfaches von 5}}} = b_{\underbrace{000000000}_{\text{Vielfaches von 5}} + 4} = b_4 = 1.$$



# Aufgabe 3

(i)

I.A.:  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

I.V.:

Es ist  $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

I.S.:  $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) &= 2(n+1) - 1 + \sum_{i=1}^n (2i-1) \stackrel{\text{I.V.}}{=} 2(n+1) - 1 + n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Somit ist  $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii)

I.A.:  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$$

I.V.:

Es ist  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

I.S.:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= (n+1)^3 + \sum_{i=1}^n i^3 \stackrel{\text{I.V.}}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4(n+1)^3 + n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(4(n+1) + n^2)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 2 \cdot 2n + 2^2)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 7 \cdot b \\ c &= 7 \cdot d \\ \Rightarrow a+c &= 7(b+d) \end{aligned}$$



als Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen durch 7 teilbar.

Also ist  $2^{3n} - 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 7 teilbar.

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Somit ist  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(iii)

I.A.:  $n = 1$

$$2^{3 \cdot 1} - 1 = 8 - 1 = 7 \text{ ist durch 7 teilbar}$$

I.V.:

Die Zahl  $2^{3n} - 1$  ist für ein  $n \in \mathbb{N}$  durch 7 teilbar.

I.S.:  $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad 2^{3(n+1)} - 1 &= 2^{3n+3} - 1 = 2^{3n} \cdot 2^3 - 1 = 2^{3n} \cdot 8 - 1 \\ &= 2^{3n} (7+1) - 1 \\ &= \underbrace{2^{3n} \cdot 7}_{\text{durch 7 teilbar}} + \underbrace{2^{3n} - 1}_{\text{nach I.V. durch 7 teilbar}} \end{aligned}$$



# Aufgabe 4

(i)

Sei  $A \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$ . Dann ist  $A$  eine Teilmenge von  $X$  oder eine Teilmenge von  $Y$ . Da sowohl  $X$ , als auch  $Y$  in  $X \cup Y$  enthalten ist, erhalten wir in beiden Fällen  $A \subseteq X \cup Y$ , d.h.  $A \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ .

Hier gilt i.A. keine Gleichheit:

Sind  $X = \{0\}$  und  $Y = \{1\}$ , so

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X \cup Y) &= \mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \\ &\neq \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\} \\ &= \{\emptyset, \{0\}\} \cup \{\emptyset, \{1\}\} \\ &= \mathcal{P}(\{0\}) \cup \mathcal{P}(\{1\}) \\ &= \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y). \end{aligned}$$

(ii)

Es ist

$$\mathcal{P}(X \cap Y) = \{A \mid A \subseteq X \cap Y\}$$

Ist  $A \subseteq X \cap Y$ , so ist also  $A \subseteq X$  und  $A \subseteq Y$ .  
Ist andererseits  $A \subseteq X$  und  $A \subseteq Y$ , so auch  $A \subseteq X \cap Y$ .

$$\begin{aligned} &\rightarrow = \{A \mid A \subseteq X \text{ und } A \subseteq Y\} \\ &= \{A \mid A \subseteq X\} \cap \{A \mid A \subseteq Y\} \\ &= \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \end{aligned}$$

(iii)

Es ist

$$\begin{aligned} X \setminus (Y \cup Z) &= \{x \in X \mid x \notin Y \cup Z\} \\ &= \{x \in X \mid \neg(x \in Y \cup Z)\} \\ &= \{x \in X \mid \neg(x \in Y \text{ oder } x \in Z)\} \\ &\stackrel{24}{=} \{x \in X \mid \underbrace{\neg(x \in Y)}_{x \notin Y} \text{ und } \underbrace{\neg(x \in Z)}_{x \notin Z}\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin Y\} \cap \{x \in X \mid x \notin Z\} \\ &= (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \end{aligned}$$

(iv)

Es ist

$$X \setminus (Y \cap Z) = \{x \in X \mid x \notin Y \cap Z\}$$



$$= \{x \in X \mid \neg(x \in Y \cap Z)\}$$

$$= \{x \in X \mid \neg(x \in Y \text{ und } x \in Z)\}$$

$$\stackrel{24}{=} \{x \in X \mid \underbrace{\neg(x \in Y)}_{x \notin Y} \text{ oder } \underbrace{\neg(x \in Z)}_{x \notin Z}\}$$

$$= \{x \in X \mid x \notin Y\} \cup \{x \in X \mid x \notin Z\}$$

$$= (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$