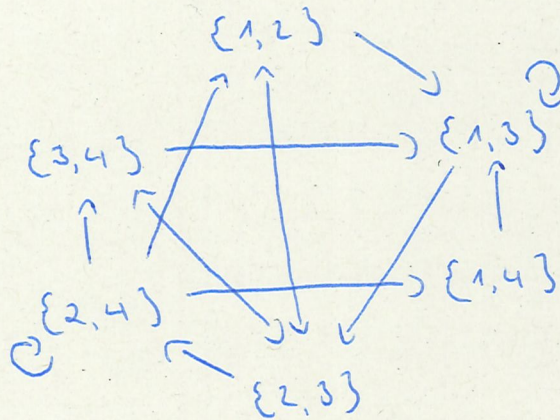


Aufgabe 1

(i)



(ii)

Reflexivität:

Die Relation ist nicht reflexiv, da z.B. $\{1,2\} \not\sim \{1,2\}$, wie man obigen Bild entnehmen kann.

Symmetrie:

Die Relation ist nicht symmetrisch, da z.B. $\{1,2\} \sim \{1,3\}$, aber $\{1,3\} \not\sim \{1,2\}$.

Transitivität:

Die Relation ist nicht transitiv, da z.B. $\{1,4\} \sim \{1,3\}$ und $\{1,3\} \sim \{2,3\}$, aber $\{1,4\} \not\sim \{2,3\}$.

Die Relation R ist keine Äquivalenzrelation, da sie z.B. nicht reflexiv ist.

Aufgabe 2

(i)

Das Problem dieser Vorschrift ist, dass Quadrate rationaler Zahlen nicht zwingend ganzzahlig sind.

Bsp.:

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$$

Somit kann f_1 keine Abbildung mit Wertebereich $\mathbb{Z}$ sein.

(ii)

Das Problem der Vorschrift f_2 ist, dass nicht jedem Element des Definitionsbereiches ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird.

Bsp.:

Die Zahl $1 \in \mathbb{Z}$ ist ungerade und lässt sich daher nicht als $2m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$

schreiben. Daher ist $f_2(1)$ nicht definiert.

Somit kann f_2 keine Abbildung mit Definitionsbereich $\mathbb{Z}$ sein.

(iii)

Das Problem dieser Vorschrift ist, dass Elementen des Definitionsbereiches mehrere Elemente des Wertebereiches zugeordnet werden.

Bsp.:

$$f_3(1) = f_3\left(\frac{1}{1}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

und

$$f_3(1) = f_3\left(\frac{2}{2}\right) = 2 \cdot 2 = 4$$

Daher ist f_3 keine Abbildung.

(iv)

Hier ergibt die Vorschrift selbst keinen Sinn, da es Elemente der Form

$\max(\mathbb{N}_{>2n})$ einfach nicht gibt:

Gäbe es $\max(\mathbb{N}_{>2n}) \in \mathbb{N}$, so könnten wir $\max(\mathbb{N}_{>2n}) + 1$ betrachten, und dies wäre auch eine natürliche Zahl. Nun ist allerdings $\max(\mathbb{N}_{>2n}) + 1 > \max(\mathbb{N}_{>2n})$ im Widerspruch zur definierenden Eigenschaft von $\max(\mathbb{N}_{>2n})$.

Also ist f_n keine Abbildung.

(v)

Auch hier ist der Wertebereich das Problem.

Bsp.:

$$f_5(0) = (m \mapsto 0 \cdot m = 0)$$

Die Abbildung $f_5(0)$ ist also die Nullabbildung, aber $\mathbb{N}$ enthält die Zahl 0 nicht. Somit kann $f_5(0)$ keine Abbildung mit Wertebereich $\mathbb{N}$ sein und somit f_5 keine Abbildung mit Wertebereich

$\{f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}$

sein.

Aufgabe 3

(i)

Es sind

$$f(\mathbb{Z}_{>0}) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N},$$

$$f(\{0, \emptyset\}) = \{\emptyset\}$$

und

$$f(\mathbb{Z}_{<0}) = \{-2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N},$$

sodass

$$\begin{aligned} \text{im}(f) = f(\mathbb{Z}) &= 2\mathbb{N} \cup \{\emptyset\} \cup 2\mathbb{N} \\ &= 2\mathbb{N} \cup \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Demnach ist f nicht surjektiv, da z.B. $0 \in \mathbb{N}_0 \cup \{\emptyset\}$ nicht im Bild enthalten ist.

(ii)

Es ist

$$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{0, \emptyset\},$$

sodass dieses Urbild 2-elementig ist. Ist $n \in 2\mathbb{N}$, so entnehmen wir obiger Berechnung von $f(\mathbb{Z})$, dass n genau zwei Urbilder besitzt:

Ist $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist

$$f^{-1}(\{n\}) = \{m, -m\}.$$

Ist $n \in (\mathbb{N}_0 \cup \{\emptyset\}) \setminus (2\mathbb{N} \cup \{\emptyset\}) = 2\mathbb{N}-1$, so besitzt n kein Urbild.

Die Abbildung $f: \mathbb{Z} \cup \{\emptyset\} \rightarrow f(\mathbb{Z} \cup \{\emptyset\})$ ist nicht injektiv, da z.B. $f(1) = 2 = f(-1)$.

~~■~~

(iii)

Basierend auf ~~den~~ Aufgabenteilen (i) und (ii), können wir $M = \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \cup \{\emptyset\}$ wählen, da dann noch immer

$$f(\mathbb{N}_0) = 2\mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$$

gilt, wir aber jeweils genau ein Urbild ~~eines~~ jeden Elementes aus dem Definitionsbereich entfernt haben.

Aufgabe 4

(i)

Da 3 ein Teiler von 0 ist ($3 \cdot 0 = 0$), liegen je zwei Elemente $A, B \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ mit $|A| = |B|$ bereits in der gleichen Äquivalenzklasse. Wir müssen also nur noch schauen, wann Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ mit verschieden vielen Elementen in Relation zueinander stehen. Hierbei können wir aufgrund der Symmetrie stets $|A| \geq |B|$ annehmen und erhalten:

$$\begin{aligned} 4-3 &= 1, & 3+1 \\ 4-2 &= 2, & 3+2 \\ 4-1 &= 3, & 3+3 \\ 4-0 &= 4, & 3+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3-2 &= 1, & 3+1 \\ 3-1 &= 2, & 3+2 \\ 3-0 &= 3, & 3+3 \end{aligned}$$

$$1-0 = 1, \quad 3+1$$

hier:
alb, falls
kein Teiler
von b ist

Somit gibt es folgende drei Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned} [\emptyset] &= \{\emptyset\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \mid |A| = 3\} \\ [\{1\}] &= \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \mid |A| = 1\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \mid |A| = 4\} \\ [\{1, 2\}] &= \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \mid |A| = 2\} \end{aligned}$$

(ii)

Wir müssen uns nur überlegen, was mit den neuen Elementen passiert. Da es aber nur auf die Anzahl der Elemente der jeweiligen Mengen ankommt, wissen wir bereits, ~~in welche Äquivalenzklassen alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ gehören, mit Ausnahme von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.~~ Nun ist 3 kein Teiler von $5-4, 5-3, 5-1$ und $5-0$, aber von $5-2$. Daher gibt es auch hier drei Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned} [\emptyset] &= \{\emptyset\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \mid |A| = 3\} \\ [\{1\}] &= \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \mid |A| = 1 \text{ oder } |A| = 4\} \\ [\{1, 2\}] &= \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \mid |A| = 2\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \mid |A| = 5\} \end{aligned}$$

Somit ist

$$f: \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) / \sim \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) / \sim$$

$$[a]_{\sim} \mapsto [a]_{\sim}$$

eine Bijektion.

(iii)

Ja, denn nun gibt es vier Äquivalenzklassen bzgl. der neuen $\sim$:

$$[\emptyset] = \{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \mid |A| = 0 \text{ oder } |A| = 4\}$$

$$[\{1\}] = \{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \mid |A| = 1 \text{ oder } |A| = 5\}$$

$$[\{1,2\}] = \{ \text{---} \text{---} \mid |A| = 2 \}$$

$$[\{1,2,3\}] = \{ \text{---} \text{---} \mid |A| = 3 \}$$

← genau
wie oben

Daher kann es keine Bijektion

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})/\sim$$

geben.