

Aufgabe 1

(i)

(a)

$$\frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + i \frac{1}{10}$$

(b)

$$(1+2i)^4 = ((1+2i)^2)^2 = (1+4i+4i^2)^2 = (-3+4i)^2$$

$$= 9 - 24i + 16i^2 = -7 - 24i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

(c)

$$\frac{2-i^{99}}{5i} + \frac{4}{i^3} = \frac{2-(i^4)^{24} \cdot i}{5i} + \frac{4}{(i^4)^2 \cdot i} = \frac{2-i}{5i} + \frac{4}{i}$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i \Rightarrow = \frac{2+i}{5i} + \frac{20}{5i}$$

$$= \frac{22+i}{5i}$$

$$= \frac{22+i}{5i} \cdot \frac{(-5i)}{(-5i)}$$

$$= \frac{5-110i}{25}$$

$$= \frac{1}{5} - i \frac{22}{5}$$

Somit

$$\left| \frac{1}{3-i} \right| = \left| \frac{3}{10} + i \frac{1}{10} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$|(1+2i)^4| = |-7-24i| = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$$

und

$$\left| \frac{2-i^{99}}{5i} + \frac{4}{i^3} \right| = \left| \frac{22+i}{5i} \right| = \sqrt{\left(\frac{22}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{484+1}{25}} = \frac{\sqrt{485}}{5}$$

(ii)

(a)

$$\overline{-4}^2 - \overline{1} = (-4)^2 - \overline{1} = 16 - \overline{1} = \overline{5} - \overline{1}$$

$$\overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{25} = \overline{15} = \overline{1} = \dots = \overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{4}$$

(b)

$$\overline{5}^{-1} \cdot \overline{6} = \overline{3} \cdot \overline{6} = \overline{3 \cdot 6} = \overline{18} = \overline{4}$$

$$(c) \quad \frac{\overline{99999999}}{100} = \frac{\overline{99999999}}{100} = \frac{\overline{99999999}}{-1} = \frac{\overline{99999999}}{(-1)}$$

$$= \overline{-1}$$

$$= \overline{100}$$

Aufgabe 2

(i)

$$f(1) = -1^3 + 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = -1 + 4 - 5 + 2 = 0$$

(ii)

$$-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 : x - 1 = -x^2 + 3x - 2$$

$$\begin{array}{r} -(-x^3 + x^2) \\ \hline 3x^2 - 5x + 2 \\ -(3x^2 - 3x) \\ \hline -2x + 2 \\ -(-2x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

Es ist also

$$f = (x-1) \underbrace{(-x^2 + 3x - 2)}_{=g}$$

(iii)

Da

$$g = -x^2 + 3x - 2 = -(x^2 - 3x + 2),$$

wenden wir die pq-Formel an:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\left(-\frac{3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also ist

$$f = (x-1)(-x^2 + 3x - 2) = -(x-1)^2(x-2).$$

Aufgabe 3

(i)

Wir zeigen allgemeiner, dass die Verkettung von Abbildungen stets assoziativ ist:

Seien A, B, C und D Mengen und seien $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ und $h: C \rightarrow D$ Abbildungen.

Dann ist

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f(a) &= h \circ g(f(a)) = h(g(f(a))) \\ &= h(g \circ f(a)) \\ &= h \circ (g \circ f)(a)\end{aligned}$$

für alle $a \in A$.

(ii)

Wir wissen, dass $\text{id}_{\mathbb{R}}$ neutral bzgl. " $\circ$ " ist. Da $f_{1,0} = \text{id}$, besitzt $\text{Aff}(\mathbb{R})$ also ein neutrales Element bzgl. " $\circ$ ".

(iii)

Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine Abbildung f genau dann eine Umkehrabbildung besitzt, wenn f bijektiv ist. Nun ist $f_{0,1}(x) = 0 \cdot x + 1 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass $f_{0,1}$ nicht ~~bijektiv~~ bijektiv ist. Also ist $f_{0,1} \in \text{Aff}(\mathbb{R})$ nicht invertierbar. Daher ist $\text{Aff}(\mathbb{R})$ keine Gruppe.

Nun zeigen wir, dass $\text{Aff}(\mathbb{R})$ eine Gruppe ist. Sei $f_{a,b} \in \text{Aff}(\mathbb{R})$, d.h. insbesondere, dass $a \neq 0$ ist und somit a^{-1} existiert. Nun ist

$$\begin{aligned}f_{a,b} \circ f_{a^{-1}, -a^{-1}b}(x) &= f_{a,b}(a^{-1}x - a^{-1}b) = a(a^{-1}x - a^{-1}b) + b \\ &= x - b + b \\ &= x \\ &= \text{id}(x) \\ &= x \\ &= x + a^{-1}b - a^{-1}b \\ &= a^{-1}(ax + b) - a^{-1}b \\ &= f_{a^{-1}, -a^{-1}b}(ax + b) \\ &= f_{a^{-1}, -a^{-1}b} \circ f_{a,b}(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $f_{a,b} \in \text{AFF}(\mathbb{R})$ invertierbar
mit Inversen $f_{a^{-1}, -a^{-1}b}$.

(iv)

Die Gruppe $\text{AFF}(\mathbb{R})$ ist nicht abelsch:

$$f_{1,2} \circ f_{3,4}(z) = f_{1,2}(f_{3,4}(z)) = f_{1,2}(3 \cdot z + 4) = f_{1,2}(10)$$

$$= 1 \cdot 10 + 2$$

$$= 12$$

$$\neq 16$$

$$= 3 \cdot 4 + 4$$

$$f_{3,4} \circ f_{1,2}(z) = f_{3,4}(f_{1,2}(z)) = f_{3,4}(1 \cdot z + 2) = f_{3,4}(4)$$

Aufgabe 4

(i)

Zunächst ist $S_2 = \{id, \tau\}$ mit $\tau: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ definiert durch $\tau(1) = 2$ und $\tau(2) = 1$. Nun setzen wir

$$id * \sigma = id = \sigma * id$$

für alle $\sigma \in S_2$ und

$$\tau * \tau = \tau.$$

Behauptung: $(S_2, \circ, *)$ ist ein Körper

Wir wissen bereits, dass $(S_2, \circ)$ eine Gruppe ist. Diese ist abelsch, da

$$id \circ \tau = \tau = \tau \circ id$$

und jedes Element mit sich selbst kommutiert.

Auch $*$ ist kommutativ, wie wir obiger Definition direkt ~~entnehmen~~ entnehmen können.

wegen Komm.
von $*$ reicht es
einseitig zu testen

Assoziativität von $*$:

Ist eines der Elemente id , so ist per Definition von $*$ das Ergebnis auch id . Somit ist nur

$$(\tau * \tau) * \tau = \tau * (\tau * \tau)$$

zu überprüfen, aber hier sind auch beide Seiten per Definition durch τ gegeben.

τ ist neutral bzgl. $*$:

Ist auch direkt per Definition gegeben.

Distributivität:

~~Da $id * \sigma = id$ und $id \circ id = id$, resultieren alle~~

τ -Multiplikationen in id . Die übrigen Fälle sind:

$$\begin{aligned} \tau * (id \circ id) &= \tau * id = id = id \circ id \\ &= (\tau * id) \circ (\tau * id) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau * (\tau \circ id) &= \tau * \tau = \tau = \tau \circ id \\ &= (\tau * \tau) \circ (\tau * id) \\ &= (id * \tau) \circ (\tau * \tau) \end{aligned}$$

$$\tau * (\tau \circ \tau) = \tau * id = id = \tau \circ \tau \\ = (\tau \circ \tau) \circ (\tau * \tau)$$

Inverse bzgl. $*$:

Da $S_2 \setminus \{id\} = \{\tau\}$ und $\tau \circ \tau = id$ hat jedes Element von $S_2 \setminus \{id\}$ ein Inverses bzgl. $*$.

Insgesamt ist $(S_2, \circ, *)$ also ein Körper.

(ii)

Behauptung: S_n ist für $n \geq 3$ nicht abelsch

Sei $n \geq 3$. Dann existieren Elemente $\sigma, \tau \in S_n$ mit

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3 \quad \text{und} \quad \sigma(3) = 1$$

und

$$\tau(1) = 2 \quad \text{und} \quad \tau(2) = 1.$$

Dann ist

$$\sigma \circ \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \sigma(\tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \tau(\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da bereits
 $\tau(1)=2$ und
 τ bijektiv

z.B.
durch $x \mapsto x$
auf allen anderen
Elementen

Also ist S_n i.A. nicht abelsch.

(iii)

Wollen wir eine Abbildung $\sigma: X \rightarrow X$ definieren, so haben wir n Wahlen für das Bild von $1 \in X$. Für das Bild von $2 \in X$ haben wir, da unsere Abbildung bijektiv sein soll, nur noch $n-1$ Wahlen (denn das Bild der 1 dürfen wir nicht mehr wählen). Für das Bild der 3 usw. aus demselben Grund $n-2$ Wahlen etc. Insgesamt also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten. In anderen Worten, $|S_n| = n!$.

(iv)

Für ein Element $\sigma \in S_n$ definieren wir $f(\sigma)$ durch

$$f(\sigma)(x) = \begin{cases} \sigma(x), & 1 \leq x \leq n \\ n+1, & x = n+1 \end{cases}$$

und betrachten die Abbildung $f: S_n \rightarrow S_{n+1}$, $\sigma \mapsto f(\sigma)$. Diese ist injektiv. Sind nämlich $\sigma, \sigma' \in S_n$ mit $f(\sigma) = f(\sigma')$, so ist per Definition $\sigma(x) = \sigma'(x)$ für alle $1 \leq x \leq n$. Also ist $\sigma = \sigma'$, d.h. f ist injektiv.

Nun überprüfen wir noch die andere Eigenschaft:

Seien $\sigma, \sigma' \in S_n$. Dann ist

$$f(\sigma \circ \sigma')(x) = \begin{cases} \sigma \circ \sigma'(x), & 1 \leq x \leq n \\ n+1, & x = n+1 \end{cases}$$

Ist $1 \leq x \leq n$, so ist zudem

$$\begin{aligned} f(\sigma) \circ f(\sigma')(x) &= f(\sigma)(f(\sigma')(x)) = f(\sigma)(\underbrace{\sigma'(x)}_{1 \leq \sigma'(x) \leq n}) \\ &= \sigma(\sigma'(x)) \\ &= \sigma \circ \sigma'(x). \end{aligned}$$

Ist $x = n+1$, so

$$f(\sigma) \circ f(\sigma')(x) = f(\sigma)(f(\sigma')(n+1)) = f(\sigma)(n+1) = n+1.$$

Also $f(\sigma \circ \sigma') = f(\sigma) \circ f(\sigma')$.

(v)

Wir betrachten $\sigma \in S_n$ definiert durch

$$\sigma(x) = x+1 \text{ für } 1 \leq x \leq n-1$$

↳ offenbar $\sigma \neq \text{id}$

und

$$\sigma(n) = 1.$$

Dann ist

$$\underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n \text{ mal}}(x) = \begin{cases} \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n-1 \text{ mal}}(x+1), & \text{falls } 1 \leq x \leq n-1 \\ \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n-1 \text{ mal}}(1), & \text{falls } x = n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n-2 \text{ mal}}(x+2), & \text{falls } 1 \leq x \leq n-2 \\ \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n-2 \text{ mal}}(1), & \text{falls } x = n-1 \\ \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n-2 \text{ mal}}(2), & \text{falls } x = n \end{cases}$$

= ...

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 2, & \text{falls } x = 2 \\ \vdots & \\ n, & \text{falls } x = n \end{cases}$$

Ist $x = 1$, so addieren die ersten $n-1$ Anwendungen von σ jeweils eine 1 und die letzte Anw. von σ macht aus der resultierenden Zahl n dann erneut eine 1

Für $x = 2, \dots, n$ analog.