

Aufgabe 1

(i)

Ne, denn $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \notin U_1$, da $0^2 + 0^2 \neq 1$.

(ii)

Ja:

Da $0+0+0=0$, ist $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in U_2$.

Sind $(x,y,z), (x',y',z') \in U_2$, so ist

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \in U_2,$$

da

$$x+x' + y+y' + z+z' = \underbrace{x+y+z}_{=0} + \underbrace{x'+y'+z'}_{=0} = 0.$$

Ist $(x,y,z) \in U_2$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in U_2,$$

da

$$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda \underbrace{(x+y+z)}_{=0} = 0.$$

Also ist U_2 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(iii)

Ne, denn $\underbrace{0(0)}_{\text{Nullpolynom}} = 0 \neq 7$, sodass $0 \notin U_3$.

(iv)

Ja:

Da $\deg(0) = -\infty$ (oder -1 je nach Konvention), ist $0 \in U_4$.

Sind $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in U_4$, so ist

$$f+g = a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + a_0+b_0,$$

sodass $\deg(f+g) \leq 2$.

Ist $f = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in U_4$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist

$$\lambda f = \lambda(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0,$$

sodass $\deg(\lambda f) \leq 2$.

Also ist U_1 ein Untervektorraum von $\mathbb{C}(x)$.

(v)

Ja:

Es ist $0(x) = 0(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass

$0 \in U_1$.

~

konstant Nullabb.

Sind $f, g \in U_1$, so ist

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x),$$

sodass $f+g \in U_1$.

Ist $f \in U_1$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(-x) = (\lambda f)(-x),$$

sodass $\lambda f \in U_1$.

Also ist U_1 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 2

(i)

Seien $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(\underbrace{\bar{8}, \bar{2}, \bar{13}}_{(\bar{3}, \bar{2}, \bar{3})}) + \mu(\underbrace{\bar{1}, \bar{6}, \bar{2}}_{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{2})}) + \rho(\bar{2}, \bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$$

$$= (\bar{3}\lambda + \mu + \bar{2}\rho, \bar{2}\lambda + \mu + \bar{3}\rho, \bar{3}\lambda + \bar{2}\mu)$$

Somit $\bar{3}\lambda + \bar{2}\mu = \bar{0}$, d.h. $\bar{3}\lambda = -\bar{2}\mu = \bar{3}\mu$. Also $\lambda = \mu$.

Daher

$$\bar{0} = \bar{2}\lambda + \mu + \bar{3}\rho = \bar{3}\lambda + \bar{3}\rho \quad \bar{3}^{-1} = 2$$

$$\text{und somit } \bar{3}\lambda = -\bar{3}\rho = \bar{2}\rho. \text{ Folglich } \lambda = \bar{4}\rho. \text{ Wir er-}$$

$$\text{halten}$$

$$\bar{0} = \bar{3}\lambda + \mu + \bar{2}\rho = \bar{12}\rho + \bar{4}\rho + \bar{2}\rho = \bar{18}\rho = \bar{3}\rho,$$

d.h. $\rho = 0$. Also auch $\lambda = \mu = 0$, da $\lambda = \bar{4}\rho$ und $\lambda = \mu$.
Daher sind die drei Vektoren linear unabhängig.

(ii)

Seien $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(\bar{x}^2 + 2x + 1) + \mu(2x^2 - x) + \rho(ax^2 - 1) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu + a\rho)x^2 + (2\lambda - \mu)x + (\lambda - \rho)$$

Somit $\lambda = \rho$ und $2\lambda = \mu$. Also

$$0 = \rho + 4\rho + a\rho = (5+a)\rho.$$

Ist $a \neq -5$, so ist also $\rho = 0$ und somit auch $\lambda = 0 = \mu$.
In diesem Fall sind die drei Vektoren also linear un-
abhängig.

Ist $a = -5$, so können wir $\rho = 1$ wählen und erhalten
 $\lambda = 1$ und $\mu = 2$. In der Tat, dann ist

$$1(x^2 + 2x + 1) + 2(2x^2 - x) + 1(-5x^2 - 1) = 0$$

und die drei Vektoren sind linear abhängig.

(iii)

Seien $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(1,1,1) + \mu(x,y,z) + \rho(x^2,y^2,z^2) = (0,0,0).$$

Ist $\rho \neq 0$, so haben wir also 3 quadratische Gleichungen

$$\rho x^2 + \mu x + \lambda = 0$$

$$\rho y^2 + \mu y + \lambda = 0$$

$$\rho z^2 + \mu z + \lambda = 0$$

mit ~~denselben~~ denselben Koeffizienten. Also besitzen diese Gleichungen auch dieselben Lösungen, welche wir auf 3 Unbestimmte verteilen müssen. Insbesondere müssen zwei dieser ~~gleich~~ gleich sein, was nach Annahme ausgeschlossen ist. Somit muss $\rho = 0$ sein.

Also

$$\lambda + \mu x = 0,$$

$$\lambda + \mu y = 0$$

und

$$\lambda + \mu z = 0.$$

Ist $\mu \neq 0$, so erhalten wir $x = y = z = -\frac{\lambda}{\mu}$, was ausgeschlossen ist. Somit $\mu = 0$. Dann

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 0,$$

sodass insgesamt $\lambda = \mu = \rho = 0$. Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 3

Schreiben Elemente $f \in K^{N_0}$ als $(f(0), f(1), f(2), \dots)$.

(i)

Wir behaupten, dass $\text{Fib}(K)$ ein Untervektorraum von K^{N_0} ist:

• Da $\text{fib}_{0,0} = (0, 0, 0, 0, \dots)$, ist $0_{K^{N_0}} \in \text{Fib}(K)$.

• Sind $\text{fib}_{a,b}, \text{fib}_{c,d} \in \text{Fib}(K)$, so ist

$$\begin{aligned} \text{fib}_{a,b} + \text{fib}_{c,d} &= (a, b, a+b, a+2b, \dots) + (c, d, c+d, c+2d, \dots) \\ &= (a+c, b+d, \overset{(a+c)+(b+d)}{\quad}, (a+c)+2(b+d), \dots) \\ &= \text{fib}_{a+c, b+d} \\ &\in \text{Fib}(K). \end{aligned}$$

• Ist $\text{fib}_{a,b} \in \text{Fib}(K)$ und ist $\lambda \in K$, so ist

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \text{fib}_{a,b} &= \lambda \cdot (a, b, a+b, a+2b, \dots) \\ &= (\lambda a, \lambda b, \lambda a + \lambda b, \lambda a + 2\lambda b, \dots) \\ &= \text{fib}_{\lambda a, \lambda b} \\ &\in \text{Fib}(K). \end{aligned}$$

• Sonst ist $\text{Fib}(K) \subseteq K^{N_0}$ ein Untervektorraum.

(ii)

Ist $K = \mathbb{F}_p$, so haben wir für a und b jeweils p Wahlmöglichkeiten, sodass $|\text{Fib}(\mathbb{F}_p)| = p \cdot p = p^2$.

(iii)

$\text{Fib}(\mathbb{F}_2)$:

$$\begin{array}{cc} \text{fib}_{0,1} & \text{fib}_{1,1} \\ \bullet & \bullet \\ \text{fib}_{0,0} & \text{fib}_{1,0} \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

mit komponentenweiser Addition auf Ebene der Indizes

also genau wie $\mathbb{F}_p$ für $p=2,3$.

$\text{Fib}(\mathbb{F}_3)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{fib}_{0,2} & \text{fib}_{1,2} & \text{fib}_{2,2} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{fib}_{0,1} & \text{fib}_{1,1} & \text{fib}_{2,1} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{fib}_{0,0} & \text{fib}_{1,0} & \text{fib}_{2,0} \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

— 11 —

Aufgabe 4

(i) Wahr

Es ist $\langle u \rangle = \bigcap_{\substack{u' \in U \text{ mit} \\ u \in u'}} u' = u$, da u ein

Untervektorraum ist. Somit können wir $\lambda = a$ wählen.

(ii) Wahr

(ii) Wahr
Ist $v \in \langle \omega \rangle = \{ \lambda \omega \mid \lambda \in K \}$ mit $v \neq 0 \neq \omega$, so ex.
also ein ~~_____~~ $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $v = \lambda \omega$. Dann

$$u = (\lambda^{-1} \lambda) u = \lambda^{-1} (\lambda u) = \lambda^{-1} v$$

und somit $v \in \langle v \rangle$.

(iii) Wahr

Wäre $\langle \chi_{(v, \omega)} | \chi_{(v, \omega)} \rangle = \langle \chi_{(v, \omega)} | \chi_{(v, \omega)} \rangle = \{ \chi_{(v, \omega)} + \dots | \chi_{(v, \omega)} \}$,

so erhalten wir $\mu(u, v) \in \langle (v, u) \rangle$ für alle $\mu \in K$. Insbesondere
 dass ein $\lambda \in K$ mit $u = \lambda v$ und $v = \lambda u$

So erhalten wir $m(u, v) \in \langle u, v \rangle$.
 (u, v) $\in$ $\langle v, u \rangle$, ~~also~~ sodass ein $\lambda \in K$ mit $u = \lambda v$ und $v = \lambda u$
 $\lambda \in \langle v \rangle$ und $v \in \langle u \rangle$ und daher

$(u, v) \in \langle\langle v, u \rangle\rangle$, ~~was~~ schliess in $x \in u$ und
ex. Das heißt, es ist $u \in \langle v \rangle$ und $v \in \langle u \rangle$ und daher

$$\langle v \rangle = \langle v, u \rangle = \langle u \rangle. \quad \text{②}$$

Also ist $\langle v, u \rangle \not\subseteq \langle v, u \rangle, \langle u, v \rangle$. Analog
sicht man $\langle u, v \rangle \not\subseteq \langle v, u \rangle, \langle u, v \rangle$.

(iv) Falsch

(iv) falsch
Ist $V = \mathbb{R}^2$ und $A = \{(1,1)\}$ und $B = \{(-1,-1)\}$,
so ist

$$\langle A \cap B \rangle = \langle \{u, v\} \cap \{(-1, -1)\} \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{(0, 0)\}$$

abc

also

$$\langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \underbrace{\langle \{(1,1)\} \rangle} \cap \underbrace{\langle \{(-1,-1)\} \rangle} = \{x^{(1,1)} \mid x \in K\}.$$

$$= \{ \chi(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in K \} = \{ \mu(-1, -1) \mid \mu \in K \}$$

$$\{(-\mu)(-1, -1) \mid \mu \in \mathbb{N}\}$$

$$\{p(u, v) \mid p \in \mathcal{U}\}$$

Somit $\langle A \cap B \rangle \neq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$.

(v) Wahr

(v) Dann
Ang., $\langle A \rangle \not\subseteq \langle B \rangle$ und $\langle B \rangle \not\subseteq \langle A \rangle$. Dann ex.
 $v \in \langle A \rangle$ mit $v \notin \langle B \rangle$ und $w \in \langle B \rangle$ mit $w \notin \langle A \rangle$.
 $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$,

Nun ist $v+w \in \text{[blau markiertes Feld]}$ $(A \cup B) = (A) \cup (B)$,
 sodass $v+w \in (A)$ oder $v+w \in (B)$. In ersten Fall
 erhalten wir dann $\dots \in (A) \}$

erhalten wir

$$U = \frac{v+u-v}{e(A)} \in (A)$$

und im zweiten Fall

$$v = \underbrace{v+u}_{\in \langle B \rangle} - \underbrace{u}_{\in \langle B \rangle} \in \langle B \rangle \quad \S$$

Somit ist unsere Annahme falsch, d.h. es ist
 $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ oder $\langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle$.