Aufgabe 1

(i)

Seien $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda(1,1,0,0) + \mu(1,-2,1,3) + \rho(1,0,1,1)} = (0,0,0,0)$$

$$= (\lambda+\mu+\rho, \lambda-2\mu, \mu+\rho, 3\mu+\rho)$$

Somit $\rho = -\mu$ und $\rho = -3\mu$, sodass $\mu = 0 = \rho$. Daher auch $0 = \lambda+\mu+\rho = \lambda$. Also ist (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.

(ii)

Wir setzen $v_4 = (0,0,0,1)$. Dann ist das Tupel $(v_1, \dots, v_4)$ linear unabhängig:

Sind $\lambda, \mu, \rho, \eta \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda(1,1,0,0) + \mu(1,-2,1,3) + \rho(1,0,1,1) + \eta(1,0,0,0)} = (0,0,0,0)$$

$$(\lambda+\mu+\rho+\eta, \lambda-2\mu, \mu+\rho, 3\mu+\rho),$$

so erhalten wir wie oben $\mu = 0 = \rho$ und somit $0 = \lambda - 2\mu = \lambda$. Daher ist auch $\eta = \lambda+\mu+\rho+\eta = 0$.

Da $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, ist das Tupel $(v_1, \dots, v_4)$ bereits maximal linear unabhängig und somit eine Basis.

Aufgabe 2

(i)

Da sich jede komplexe Zahl z als $x+yi$ schreiben lässt, wobei $x,y\in\mathbb{R}$ sind, bildet die Menge $\{1,i\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sind nun $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ mit

$$\lambda\cdot 1+\mu\cdot i=0,$$

so ist per Definition $\lambda=0=\mu$, d.h. das Tupel $(1,i)$ ist linear unabhängig. Somit ist $(1,i)$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, sodass $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=2$.

(ii)

Jedes Polynom $f\in K[T]$ mit $\deg(f)\leq 2$ lässt sich als $a_2T^2+a_1T+a_0$ schreiben, wobei $a_0,a_1,a_2\in K$. Somit ist $\{1,T,T^2\}$ ein Erzeugendensystem von $\{f\in K[T]\mid \deg(f)\leq 2\}$. Nach Bsp. 10.5 aus der Vorlesung ist $(1,T,T^2)$ aber auch linear unabhängig und daher eine Basis. Also ist $\dim(\{f\in K[T]\mid \deg(f)\leq 2\})=3$.

(iii)

Per Definition lässt sich jedes Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ als $a+b\sqrt{3}$ mit $a,b\in\mathbb{Q}$ schreiben, sodass $\{1,\sqrt{3}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist. Sind nun $\lambda,\mu\in\mathbb{Q}$ mit

$$\lambda+\mu\sqrt{3}=0,$$

so erhalten wir $\lambda=-\mu\sqrt{3}$. Da $\lambda\in\mathbb{Q}$, ist dies nur für $\mu=0$ möglich, sodass auch $\lambda=0$. Somit ist $(1,\sqrt{3})$ linear unabhängig und daher auch eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Also $\dim(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))=2$.

Aufgabe 3

(i) Wahr

Sind v_1 und v_2 linear abhängig, so ex. $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$$

und $\lambda_1 \neq 0$ oder $\lambda_2 \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann ist $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$, sodass $v_1, v_2 \in \langle v_2 \rangle$.

(ii) Wahr

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \underbrace{\lambda_2 v_2}_{\neq 0} = 0$$

und $\lambda_1 \neq 0$ oder $\lambda_2 \neq 0$. Ist $\lambda_2 = 0$ und daher $\lambda_1 \neq 0$, so ist $v_1 = 0$, da $\lambda_1 v_1 = 0$ sein muss. Also ist

$$1 \cdot \underbrace{v_1}_{=0} + 0 \cdot v_3 = 0,$$

sodass (v_1, v_3) linear abhängig ist. Ist $\lambda_2 \neq 0$, so erhalten wir

$$0 \neq v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1,$$

sodass $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq 0$ und $v_1 \neq 0$.

Seien nun $\lambda_2', \lambda_3 \in K$ mit

$$\lambda_2' v_2 + \lambda_3 v_3 = 0,$$

wobei $\lambda_2' \neq 0$ oder $\lambda_3 \neq 0$. Wie eben können wir $\lambda_2' \neq 0$ annehmen. Nun erhalten wir

$$0 \neq v_2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2'} v_3$$

und somit $-\frac{\lambda_3}{\lambda_2'} \neq 0$ und $v_3 \neq 0$. Also ist insgesamt

$$\underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}_{\neq 0} v_1 = v_2 = \underbrace{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2'}}_{\neq 0} v_3,$$

dh.

$$\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}_{\neq 0} v_1 - \underbrace{\frac{\lambda_3}{\lambda_2'}}_{\neq 0} v_3 = 0$$

Insgesamt ist (v_1, v_3) also linear abhängig.

(iii) Falsch

Betrachte z.B. $V = \mathbb{R}^2$ und $v_1 = e_1 = \binom{1}{0}$, $v_2 = 0 = \binom{0}{0}$ und $v_3 = e_2 = \binom{0}{1}$. Dann ist

$0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$ und $1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 0$,

aber (v_1, v_3) ist als Standardbasis insbesondere linear unabhängig.

(iv) Wahr

Da $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, müssen wir nur begründen, dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Dies ist aber per Definition von $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ der Fall.

(v) Falsch

Betrachte z.B. $V = \mathbb{R}^2$ und v_1, v_2 und v_3 wie oben in (iii). Dann ist

$$v_3 = \binom{0}{1} \notin \left\langle \binom{1}{0}, \binom{0}{0} \right\rangle = \left\langle \binom{1}{0} \right\rangle = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

aber v_1 und v_2 sind linear abhängig (siehe (iii)).

Aufgabe 4

(i)

$|\mathbb{F}_p^{\,n}| = |\mathbb{F}_p|^n = p^n$

(ii)

Eine Basis eines 1-dimensionalen Untervektorraumes $U \subseteq \mathbb{F}_p^n$ ist durch einen einzelnen linear unabhängigen Vektor gegeben. Ist $v \in \mathbb{F}_p^n$, so ist für $\lambda \in \mathbb{F}_p$ genau dann

$\lambda v = 0$,

falls $\lambda = 0$ oder $v = 0$. Ist also $v \neq 0$, so ist v linear unabhängig. Ist $v = 0$, so ist $1 \cdot v = 0$ und v ist linear abhängig. Somit kommen genau alle Vektoren von $\mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ in Frage. Dies sind $p^n - 1$ Stück.

(iii)

Ist $U \subseteq \mathbb{F}_p^n$ ein 1-dimensionaler Vektorraum, so ist nach Teil (ii)

$U = \langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}_p\}$

für alle $v \in U \setminus \{0\}$. Es gibt also $p-1$ Vektoren, welche als Basis von U auftreten.

(iv)

Die Anzahl der 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_p^n$ ist also

$$\frac{p^n - 1}{p - 1} \left(= p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1 \right)$$