

Aufgabe 1

(i)

Seien $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_1((x, y) + (x', y')) &= \varphi_1(x+x', y+y') \\ &= (x+x'+y+y', 2(y+y'), -3(x+x')-3(y+y')) \\ &= (x+y+x'+y', 2y+2y', -3x-3y-3x'-3y') \\ &= (x+y, 2y, -3x-3y) + (x'+y', 2y', -3x'-3y') \\ &= \varphi_1(x, y) + \varphi_1(x', y') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda(x, y)) &= \varphi_1(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda y, -3\lambda x - 3\lambda y) \\ &= (\lambda(x+y), \lambda(2y), \lambda(-3x-3y)) \\ &= \lambda(x+y, 2y, -3x-3y) \\ &= \lambda \varphi_1(x, y). \end{aligned}$$

Also ist φ_1 linear.

(ii)

Nach Bemerkung 13.2 ist φ_2 nicht linear, da

$$\varphi_2(\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}) = (\vec{0} \cdot \vec{0} - \vec{0}, \vec{1} + \vec{0} + \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{1}) \neq (\vec{0}, \vec{0}).$$

(iii)

Seien $f = a_n T^n + \dots + a_0$, $g = b_m T^m + \dots + b_0 \in \mathbb{Q}[T]$,
wobei o.E. $n \geq m$. Sei zudem $\lambda \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_3(f+g) &= \varphi_3(a_n T^n + \dots + a_0 + b_m T^m + \dots + b_0) \\ &\stackrel{\text{setze } b_i = 0 \text{ f\"ur } i > m}{=} \varphi_3((a_n + b_n) T^n + \dots + a_0 + b_0) \\ &= (a_n + b_n) 2^n + \dots + a_0 + b_0 \\ &= a_n 2^n + \dots + a_0 + b_n 2^n + \dots + b_0 \\ &= \varphi_3(a_n T^n + \dots + a_0) + \varphi_3(b_m T^m + \dots + b_0) \\ &= \varphi_3(a_n T^n + \dots + a_0) + \varphi_3(b_m T^m + \dots + b_0) \\ &= \varphi_3(f) + \varphi_3(g) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_3(\lambda f) &= \varphi_3(\lambda(a_n T^n + \dots + a_0)) = \varphi_3(\lambda a_n T^n + \dots + \lambda a_0) \\ &= \lambda a_n 2^n + \dots + \lambda a_0 \\ &= \lambda(a_n 2^n + \dots + a_0) \end{aligned}$$

$$= \lambda y_3(a_n T^h + \dots + a_0)$$

Also ist y_3 linear.

$$= \lambda y_3(f).$$

Also ist y_3 linear.

(iv)

Da $y_4(0) = 2T \neq 0$, ist y_4 nach Bemerkung 13.2 nicht linear.

(v)

Seien $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

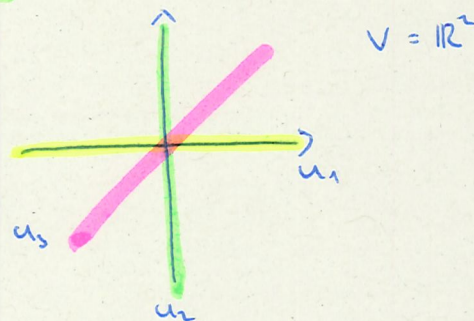
$$\begin{aligned} y_5(f+g)(n) &= (f+g)(n) + (f+g)(-n) = f(n) + g(n) + f(-n) + g(-n) \\ &= f(n) + f(-n) + g(n) + g(-n) \\ &= y_5(f) + y_5(g) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_5(\lambda f)(n) &= (\lambda f)(n) + (\lambda f)(-n) = \lambda f(n) + \lambda f(-n) \\ &= \lambda (f(n) + f(-n)) \\ &= \lambda y_5(f). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$ und $U_1 = \langle (1,0) \rangle$,
 $U_2 = \langle (0,1) \rangle$ und $U_3 = \langle (1,1) \rangle$.



$u_1 \in U_1$
 $u_2 \in U_2$
 $\leadsto x u_1 + y u_2 \in U_1 + U_2$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$
 $\leadsto \mathbb{R}^2 \subset U_1 + U_2$

Hier ist $U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$, da bereits $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$.
Zudem ist $\dim(U_i) = 1$ für $1 \leq i \leq 3$ und die Dimensionen von Schnitten der U_i sind stets 0. Daher also

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2 \neq 3$$

und

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 1 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 + 0 = 3.$$

Also ist diese Formel i.A. falsch.

Aufgabe 3

(i) Genau eine

Das Tupel $((3,-1), (2,0))$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(3,-1) + \mu(2,0) = (0,0),$$

$$(3\lambda + 2\mu, -\lambda)$$

so erhalten wir sofort $\lambda = 0$ und somit auch $2\mu = 0$, sodass $\mu = 0$. Also ist obiges Tupel linear unabhängig. Da $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, ist es aber bereits maximal linear unabhängig und somit eine Basis. Da nach Bemerkung 13.5 lineare Abbildungen eindeutig durch Bilder einer Basis festgelegt sind, gibt es hier also genau eine lineare Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften.

(ii) Mehrere

Nach Aufgabenteil (i) ist $((3,-1), (2,0))$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Somit ex. nach Bem. 13.5 genau eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(3,-1) = (1,0) = f(2,0).$$

↖ ↗
nicht injektiv

Genauso gibt es genau eine lineare Abbildung $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(3,-1) = (1,0) = g(1,0),$$

↖ ↗
nicht injektiv

da auch $((3,-1), (1,0))$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist (gleiche Rechnung wie oben). Da

$$\cancel{f}(2,0) = (1,0) \neq (2,0) = g(2,0) = g(2(1,0)) = g(2,0),$$

ist $f \neq g$, sodass wir bereits zwei ^{lineare} Abbildungen mit den gewünschten Eigenschaften gefunden haben.

(iii) Keine

Nach Satz 13.20 ist die Surjektivität einer ~~linear~~ linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ äquivalent zur Injektivität von f . Da aber auch

$$f(1,0) = f(1,1)$$

gelten soll, ist dies also nicht gleichzeitig möglich.

(iv) Keine

Da $f(0,0) = f(\vec{0}, \vec{0}) = (1,0)$ gelten soll, kann eine solche Abbildung f nach Bem. 13.2 nicht linear sein.

(v) Keine

Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(2,2) = (2,0)$ und $f(1,3) = (1,1)$ erfüllt auch

$$\begin{aligned} f(-1,-7) &= f((2,2) - 3(1,3)) \stackrel{\text{lin}}{=} f(2,2) - 3f(1,3) \\ &= (2,0) - 3(1,1) \\ &= (-1,-3). \end{aligned}$$

Also gibt es kein solches f .

Aufgabe 4

(i)

Nach Bem. 13.2 ist $f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v')$ für alle $v, v' \in V$ und $\lambda, \mu \in K$. Setzen wir $\lambda = -1$ und $\mu = 0$, so erhalten wir also $f(-v) = -f(v)$.

(ii)

Seien $v, v' \in V$ und sei $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(v+v')) &= v+v' = f(f^{-1}(v)) + f(f^{-1}(v')) \\ &\stackrel{f \text{ lin.}}{=} f(f^{-1}(v) + f^{-1}(v')) \end{aligned}$$

und

$$f(f^{-1}(\lambda v)) = \lambda v = \lambda f(f^{-1}(v)) \stackrel{f \text{ lin.}}{=} f(\lambda f^{-1}(v)).$$

Da f bijektiv ist, erhalten wir daher

$$f^{-1}(v+v') = f^{-1}(v) + f^{-1}(v')$$

und

$$f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v).$$

Somit ist f^{-1} linear.

(iii)

Wir sollen $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ zeigen. Das bedeutet laut Skript, dass jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = u + u'$ mit $u \in \ker(f)$ und $u' \in \operatorname{im}(f)$ besitzt.

Zunächst zeigen wir, dass jeder Vektor $v \in V$ überhaupt eine solche Darstellung besitzt, also, dass $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$ ist.

" $\supset$ ": Da $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ Unterräume von V sind, ist auch $\ker(f) + \operatorname{im}(f)$ ein Unterraum von V . Insbesondere ist

$$\ker(f) + \operatorname{im}(f) \subseteq V.$$

" $\subset$ ": Sei $v \in V$ und schreibe $v = v - f(v) + \overbrace{f(v)}^{\in \operatorname{im}(f)}$.

$$\text{Da } f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) \stackrel{f \circ f = f}{=} f(v) - f(v) = 0,$$

ist $v - f(v) \in \ker(f)$ und somit $v = v - f(v) + f(v)$ in $\ker(f) + \operatorname{im}(f)$ enthalten. Somit haben wir $V \subseteq \ker(f) + \operatorname{im}(f)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Darstellungen stets eindeutig sind.

Seien $v = u + u'$ und $v = \tilde{u} + \tilde{u}'$ zwei solche Darstellungen eines Vektors $v \in V$.

Da $u', \tilde{u}' \in \text{im}(f)$, ex. $u, \tilde{u} \in V$ mit

$f(u) = u'$ und $f(\tilde{u}) = \tilde{u}'$. Somit ist

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{f(u - \tilde{u})}_{\in \ker(f)} = f(v - u' - (v - \tilde{u}')) = f(\tilde{u}' - u') \\ &= f(f(\tilde{u}) - f(u)) \\ &= f(f(\tilde{u}) - f(u)) \\ &= f(\tilde{u}) - f(u) \\ &= \tilde{u}' - u'. \end{aligned}$$

Also $u' = \tilde{u}'$. Dann erhalten wir aber auch

$$u + u' = v = \tilde{u} + \tilde{u}' = \tilde{u} + u',$$

sodass auch $u = \tilde{u}$. Also sind die beiden Darstellungen gleich.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $V = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$.