Aufgabe 1

(i)

Laut Vorlesung ist ein Matrixprodukt genau dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt.

Somit sind $B \cdot A$ und $B^2 = B \cdot B$ definiert und alle anderen Matrixprodukte nicht.

(ii)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 1(-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 3 & (-3)(-1) + 1 \cdot 1 & (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1)(-3) & 1(-1) + (-1) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & (-3)(-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Es sind

$$f(1,0,0) = (1-2\cdot 0+0,\ 3\cdot 1-0) = (1,3) = (-1)(1,-1) + 2(1,1),$$

$$f(1,1,0) = (1-2\cdot 1+0,\ 3\cdot 1-0) = (-1,3) = (-2)(1,-1) + (1,1)$$

und

$$f(1,1,1) = (1-2\cdot 1+1,\ 3\cdot 1-1) = (0,2) = (-1)(1,-1) + (1,1),$$

kann man hier direkt sehen; ansonsten LGS lösen

sodass die darstellende Matrix von f durch

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3

(i)

Seien $w+U,\ w'+U \in W/U$ und sei $\lambda \in K$.
Dann ist

$$(w+U)+(w'+U) = \underbrace{(w+w')}_{\substack{\in W, \text{ da} \\ W \text{ UVR von} \\ V}} + U \in W/U$$

und

$$\lambda(w+U) = \underbrace{(\lambda w)}_{\in W, \text{ s.o.}} + U \in W/U.$$

Da zudem $U = 0+U \in W/U$, ist W/U somit ein UVR von V/U.

(ii)

Ist $w \in W$, so ist

$$f(w) = (w+U) + W/U \underset{w \in W}{=} (0+U) + W/U,$$

wobei $f: V \to (V/U)/(W/U)$ die lineare Abb. aus der Aufgabe ist. Also ist $W \subseteq \ker(f)$.

Ist $v \in \ker(f)$, so ist also

$$(v+U) + W/U = 0,$$

d.h. $v+U \in W/U = \{w+U \mid w \in W\}$. Somit $v \in W$, sodass insgesamt $W = \ker(f)$.

(iii)

Da f offenbar surjektiv ist, erhalten wir

$$V/W = V/\ker(f) \xrightarrow{\cong} \operatorname{im}(f) = (V/U)/(W/U)$$

vermöge des Isomorphiesatzes.

Aufgabe 4

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f: U \to (U+W)/W,$$
$$u \mapsto u+W$$

Dann ist

$$\ker(f) = \{u \in U \mid f(u) = 0+W\}$$
$$= \{u \in U \mid u+W = 0+W\}$$
$$= \{u \in U \mid u \in W\}$$
$$= U \cap W.$$

Ist nun $u+w+W = u+W \in (U+W)/W$, so ist $u \in U$ offenbar ein Urbild von $u+w+W$ unter f, sodass f surjektiv ist. Somit liefert der Isomorphiesatz

$$U/(U \cap W) = U/\ker(f) \xrightarrow{\cong} \operatorname{im}(f) = (U+W)/W.$$