

Aufgabe 1

Der Rangsatz liefert

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\ker(f)).$$

Somit genügt es, die Dimension des Kernes von f zu bestimmen. Nun ist

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{(x+2y, y-z, x+z)} = (0, 0, 0)\}$$

$$\begin{aligned} x &= -2y = -2z \\ y &= z \\ x &= -z \end{aligned}$$

$$\leadsto z = 0 \leadsto x = y = 0$$

$$= \{(0, 0, 0)\},$$

sodass $\dim(\ker(f)) = 0$ und somit $\operatorname{rg}(f) = 3 - 0 = 3$.

Aufgabe 2

Laut Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ein Ring mit Eins bildet. Daher müssen wir nur noch

- (i) $0, 1 \in A$
- (ii) A ist abgeschlossen unter " $+$ " und " $\cdot$ "
- (iii) " $\cdot$ " ist kommutativ auf A
- (iv) ~~Elemente~~ Elemente aus $A \setminus \{0\}$ besitzen multiplikative Inverse

überprüfen.

(i)

Ist $x = 0 = y$, so ist

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in A.$$

Ist $x = 1$ und $y = 0$, so ist

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in A.$$

(ii)

Sind $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ -(y+y') & x+x' \end{pmatrix} \in A$$

und

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{xx'} - yy' & xy' + yx' \\ \underbrace{-yx' - xy}_{= -(xy' + yx')} & \underbrace{-yy' + xx'}_{= xx' - yy'} \end{pmatrix} \in A.$$

(iii)

Sind ~~Elemente~~ $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'x - y'y & x'y + y'x \\ -y'x - x'y & -y'y + x'x' \end{pmatrix},$$

was nach Teil (ii) mit $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix}$ übereinstimmt.

(iv)

Ist $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in A \setminus \{0\}$, so ist $x \neq 0$ oder $y \neq 0$.

Daher ist $\frac{1}{x^2+y^2}$ wohldefiniert und wir können die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

betrachten. Nun ist

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} & -\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2} \\ -\frac{yx}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} & \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(iii)}{=} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sodass $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ invertierbar ist
mit Inversen $\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$

Also ist A ein Körper.

Aufgabe 3

(i)

Sylvesters Rangsatz liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(g \circ f) &= \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{im}(f) \cap \ker(g)) \\ &= 2 - \dim(\operatorname{im}(f) \cap \ker(g)). \end{aligned}$$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \subseteq \ker(g) \\ \dim(\ker(g)) \stackrel{\text{Rang}}{=} \underset{\text{Satz}}{3} = \operatorname{rg}(g) \\ \quad = 3 - 2 \\ \quad = 1 \end{array} \right.$$

Aufgrund von (*) ist $\dim(\operatorname{im}(f) \cap \ker(g))$ nun entweder durch 1 oder durch 0 gegeben, sodass wir

$$1 \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq 2$$

erhalten.

man kann Aufgabe (i) auch so interpretieren, dass man hier aufhört und $0 \leq \dim(g \circ f) \leq 2$ hat. Zusammen mit (ii) ist aber stets alles gleich.

(ii)

Wir betrachten die linearen Abbildungen f und g definiert durch

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ e_1 &\mapsto e_1 \\ e_2 &\mapsto e_2 \\ e_3 &\mapsto 0 \\ e_4 &\mapsto 0 \\ e_5 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ e_1 &\mapsto e_1 \\ e_2 &\mapsto e_2 \\ e_3 &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Hier verwenden wir also, dass man lineare Abb. durch Angabe von Bildern einer Basis eindeutig definieren kann. Per Definition sind

$$\operatorname{im}(f) = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

und

$$\operatorname{im}(g) = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4,$$

sodass $\operatorname{rg}(f) = 2 = \operatorname{rg}(g)$. Da $\ker(g) = \langle e_3 \rangle$, ist $\operatorname{im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$, sodass nach Teil (i) der Rang von $g \circ f$ durch 2 gegeben ist.

Betrachten wir stattdessen

$$j: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$e_1 \mapsto e_1$$

$$e_2 \mapsto 0$$

$$e_3 \mapsto e_3$$

so ist ~~rg~~ $\text{rg}(j) = 2$ immer noch erfüllt, aber

$$\text{im}(f) \cap \text{ker}(j) = \langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle e_2 \rangle = \langle e_2 \rangle$$

ist 1-dimensional, sodass $\text{rg}(j \circ f) = 2 - 1 = 1$.

Beide Ränge treten also auf.

Aufgabe 4

Schreibe

$$C(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid AB = BA \text{ für alle } B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}.$$

Wir behaupten, dass

$$C(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

" $\supseteq$ ": Sei $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e + 0g & \lambda f + 0h \\ 0e + \lambda g & 0f + \lambda h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e & \lambda f \\ \lambda g & \lambda h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\lambda + f \cdot 0 & e \cdot 0 + f\lambda \\ g\lambda + h \cdot 0 & g \cdot 0 + h\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\lambda & f\lambda \\ g\lambda & h\lambda \end{pmatrix},$$

also $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}^{2 \times 2})$.

" $\subseteq$ ": Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}^{2 \times 2})$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{C(\mathbb{R}^{2 \times 2})}{=} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass wir $c = 0$ und $a = d$ erhalten.

Somit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Da zudem

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

gilt, folgt $b = 0$ und wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

In anderen Worten, $A \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Somit also $C(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wie behauptet.