2.2 Die komplexen Zahlen

Anschauung: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\sqrt{-4}$ existiert nicht ... in $\mathbb{R}$.

Idee: $i := \sqrt{-1}$ „neue Zahl" in $\mathbb{C}$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)\cdot 4} = \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{4} = i\cdot 2 \in \mathbb{C}$$

$$(i+3)\cdot(3i+7) = i\cdot 3i + i\cdot 7 + 3\cdot 3i + 3\cdot 7$$

$$= \underbrace{3\cdot \underbrace{i^2}_{=-1}}_{=-3} + \underbrace{7i + 9i}_{16i} + 21 = 18 + 16i$$

$$\mathbb{C} = \{a + b\cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Def 2.2.1: (a) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind wie folgt definiert: Als Gruppe: $(\mathbb{C}, +) := (\mathbb{R}^2, +)$.

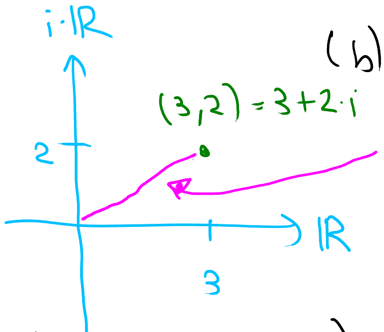
Das Produkt von $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$ ist

$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac - bd, bc + ad)$$

$$\underbrace{(a+i\cdot b)}_{(a,b)}\cdot\underbrace{(c+i\cdot d)}_{(c,d)}$$

$$= a\cdot c + i\cdot b\cdot c + i\cdot a\cdot d + i^2\cdot b\cdot d$$

$$= a\cdot c - b\cdot d + i\cdot(bc + ad)$$



(b) Der Betrag einer komplexen Zahl $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ ist

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

Satz 2.2.2: (a) $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit 1-Element $(1,0)$.

(b) Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt: $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$

Bew: (b) Nachrechnen: $z = (a,b)$, $z' = (c,d)$

$$|z\cdot z'| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2} \overset{?}{=} \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$$

...

(a) • Ring-Axiome: (i) $(\mathbb{C}, +)$ ist ab. Grp. ✓

(ii) Assoz von $\cdot$: nachrechnen

$(1,0)$ ist 1-Element:

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0,\ b\cdot 1 + a\cdot 0)$$
$$= (a,b) \qquad \text{etc.}$$

(iii) Distrib: nachrechnen ....

- $(\underset{\substack{\uparrow \\ (0,0)}}{\mathbb{C}\setminus\{0\}}, \cdot, (1,0))$ ist abelsche Gruppe:
  - $\cdot$ ist kommutativ: ✓
  - Existenz von (mult.) Inversen von $z=(a,b)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

    Bew: $z^{-1} := \left(\frac{a}{|z|^2}, -\frac{b}{|z|^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

    Prüfe: $z\cdot z^{-1} = (1,0)$ (Nachrechnen) □

„$a+i\cdot 0$"

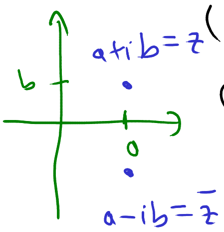
Konvention 2.2.3: Wir fassen $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ auf, indem wir $a\in\mathbb{R}$ mit $(a,0)\in\mathbb{C}$ identifizieren. Die komplexe Zahl $(0,1)$ wird mit i bezeichnet. So lässt sich jede kplexe Zahl $(a,b)\in\mathbb{C}$ schreiben als $a+i\cdot b$. $(a,b\in\mathbb{R})$

Begründung: $a+ib = (a,0)+(0,1)\cdot(b,0) = (a,0)+(0\cdot b - 1\cdot 0,\ 0\cdot 0 + 1\cdot b)$
$$= (a,b)$$

Auch zu prüfen: Die Körperstrukturen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ passen zusammen:

Also: $a,b\in\mathbb{R}$: $(a+b, 0) \overset{?}{=} (a,0)+(b,0)$
$$(a\cdot b, 0) \overset{?}{=} (a,0)\cdot(b,0)$$

Def. 2.2.4: Sei $z = a+ib \in\mathbb{C}$



(a) Der Realteil von z ist a. Der Imaginärteil von z ist b.

(b) Das komplex Konjugierte von z ist $\bar{z} := a - ib$.

(c) Komplexe Zahlen der Form ib nennt man imaginäre Zahlen.

Satz 2.2.5: Für $z, z'\in\mathbb{C}$ gilt:

(a) $\bar{\bar{z}} = z$

(b) $z\in\mathbb{R} \iff z=\bar{z}$

(c) $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$

(d) $\overline{z\cdot z'} = \bar{z}\cdot\bar{z'}$

(e) $z\cdot\bar{z} = |z|^2$

(a)–(c): klar. (d)–(e): nachrechnen.