3.3 Lineare Unabhängigkeit

K Körper, V K-VR.

Def 3.3.1: Sei $(v_i)_i \in V^I$.

(a) Eine nicht-triviale Linearkomb. der Form (nicht alle $r_i = 0$) (fast alle $r_i = 0$)

$$\sum_{i\in I} r_i v_i = 0$$

nennt man eine lineare Abhängigkeit der Vektoren v_i. l.a. :=

(b) Die Vektoren $(v_i)_{i\in I}$ nennt man linear abhängig, wenn eine lin. Abhängigkeit existiert, und linear unabhängig sonst. l.u. :=

Lemma 3.3.2: Sei $(v_i)_{i\in I} \in V^I$ und $i_0 \in I$. Ist $\sum_{i\in I} r_i v_i = 0$ eine lin. Abhängigkeit mit $r_{i_0} \neq 0$, so ist $\langle v_i \mid i\in I\rangle_K = \langle v_i \mid i\in I\setminus\{i_0\}\rangle_K$

Bew: „$\supseteq$": klar

„$\subseteq$": z.z.: Ist $w \in \langle v_i \mid i\in I\rangle_K$, so ist sogar $w \in \langle v_i \mid i\in I\setminus\{i_0\}\rangle_K$

• $w = \sum_{i\in I} s_i v_i$ ($s_i \in K$, fast alle $=0$)

$$= s_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} s_i v_i =$$

[• Nebenrechnung: $\underbrace{r_{i_0}}_{\neq 0} v_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} r_i v_i = 0 \Rightarrow v_{i_0} = -r_{i_0}^{-1} \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} r_i v_i$]

$$= -s_{i_0} \cdot r_{i_0}^{-1} \cdot \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} r_i v_i + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} s_i v_i$$

Nachtrag-Bsps

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix}r+s\\0+s\\0+s\end{pmatrix} \;\middle|\; r,s \in \mathbb{R} \right\}$

Bsp (A): $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$

$2v_1 - 2\cdot v_2 + v_3 = 0$ ist eine lin. Abh. von v_1, v_2, v_3.

Also (v_1, v_2, v_3) l.a.

Bsp (B): (v_1, v_2) sind l.u.

$x_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$

$\Updownarrow$

$1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 = 0$

$0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 = 0$

$0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 = 0$

LGS; einzige Lsg ist $(x_1, x_2) = (0,0)$

In Bsp (A): $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, v_3\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$

$$= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(-s_{i_0} \cdot r_{i_0}^{-1} \cdot r_i + s_i \right) \cdot v_i$$

$$\in \langle v_i \mid i \in I \setminus \{i_0\} \rangle_K \qquad \square$$

Satz 3.3.3: $(v_i)_i \in V^I$ ist l.a. gdw. eine echte Teilmenge $I' \subsetneq I$ existiert, so dass $\underbrace{\langle v_i \mid i \in I' \rangle_K}_{\overset{!!}{U'}} = \underbrace{\langle v_i \mid i \in I \rangle_K}_{\overset{!!}{U}}$.

Bew: „$\Rightarrow$" folgt aus 3.3.2

„$\Leftarrow$" Wähle $i_0 \in I \setminus I'$. $v_{i_0} \in U = U'$,

d.h. $v_{i_0} = \sum_{i \in I'} r_i v_i$ für geeignete $r_i \in K$

$$\Rightarrow 1 \cdot v_{i_0} - \sum_{i \in I'} r_i v_i = 0$$ ist eine lin. Abhängigkeit der $(v_i)_{i \in I}$ $\square$

Satz 3.3.4: Sei $(v_i)_i \in V^I$ und $i_0 \in I$.

Wenn $\underbrace{(v_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \text{ l.u.}}_{(*)}$ ist und $\underbrace{v_{i_0} \notin \langle v_i \mid i \in I \setminus \{i_0\} \rangle_K}_{(**)}$, dann ist auch $(v_i)_{i \in I}$ l.u.

Bsp: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist l.u. (Bsp B)

$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$. Also nach 3.3.4: (v_1, v_2, v_3) l.u.

Bew: Beweis durch Widerspruch: Nehme an, $(v_i)_{i \in I}$ ist l.a., d.h. habe lin. Abh. $\sum_{i \in I} r_i v_i = 0$.

$$\sum_{i \in I} r_i v_i = r_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} r_i v_i$$

Falls $r_{i_0} \neq 0$: $v_{i_0} = -r_{i_0}^{-1} \cdot \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} r_i v_i \Rightarrow v_{i_0} \in \langle v_i \mid i \in I \setminus \{i_0\} \rangle_K$

$\lightning$ zu (**)

Falls $r_{i_0} = 0$: Ex $i \in I \setminus \{i_0\}$ mit $r_i \neq 0$

Also ist $\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} r_i v_i = 0$ ein lin. Abh. von $(v_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$

$\lightning$ zu (*)