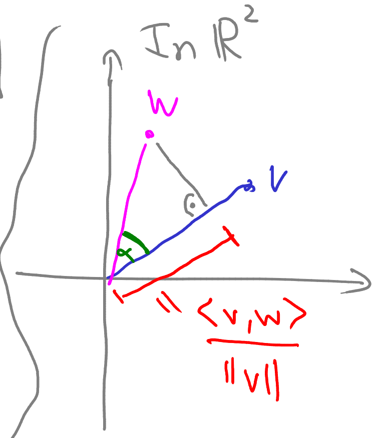
6.2 Orthonormalbasen

Sei V ein euklidischer / unitärer $\mathbb{K}$-VR

Def 6.2.1: (a) Ein Vektor $v \in V$ heißt normiert, wenn $\|v\| = 1$.

(b) Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen orthogonal zueinander wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Notation: $v \perp w$

(c) Der Winkel zwischen $v, w \in V \setminus \{0\}$ ist $\arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right)$.



$\cos\alpha = \frac{\text{rot}}{\text{rosa}} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$

Def 6.2.2: Eine Orthonormalbasis von V ist eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ so dass gilt:

(a) v_i ist normiert für $i \in I$ $\quad (\langle v_i, v_i \rangle = 1)$

(b) $v_i \perp v_j$ für $i, j \in I$, $i \neq j$ $\quad (\langle v_i, v_j \rangle = 0)$

Bsp. 6.2.3: Die Std-Basis von $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$ ist eine Orthonormalbasis (bzgl. des Std-Skalarprodukts.)

Satz 6.2.4: Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von V und seien $v \in V$. Dann gilt:
Für fast alle $i \in I$ ist $\langle v, v_i \rangle = 0$ und es gilt: $v = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i$

Bew: Schreibe $v = \sum_i r_i \cdot v_i$ für $r_i \in \mathbb{K}$.

Reicht z.z.: $\langle v, v_i \rangle = r_i$ für alle i.

$$\langle v, v_i \rangle = \left\langle \sum_j r_j v_j,\ v_i \right\rangle = \sum_j r_j \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\substack{=1 \text{ falls } i=j \\ =0 \text{ falls } i \neq j}}$$

$$= r_i \langle v_i, v_i \rangle = r_i$$

$\square$

Satz 6.2.5 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung): Ist V endl.-dim. und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so existiert eine Orthonormalbasis $w_1, \dots, w_n$ von V, so dass für $i \leq n$ gilt: $w_i \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle_{\mathbb{K}}$

Erzeugnis heute in grün

Bew: • Konstruiere nacheinander $w_1, \dots, w_n$:

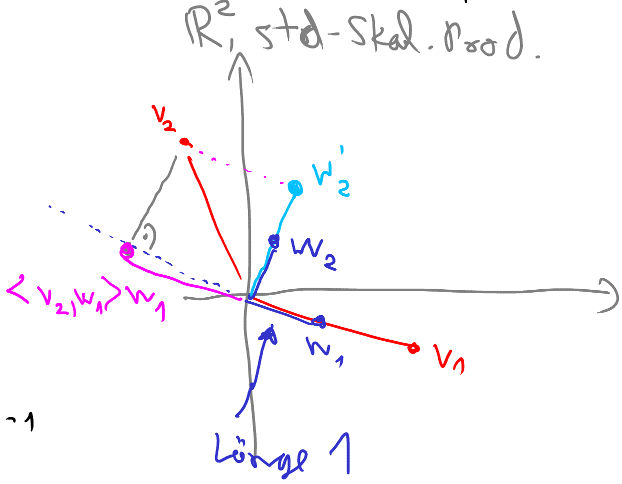
Wähle dabei w_i so, dass gilt:

(i) $w_i \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle_{\mathbb{K}}$

(ii) $w_i \perp w_j$ für alle $j < i$

(iii) $\|w_i\| = 1$

• Wahl von w_1: $\quad w_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 \quad$ (Dann: $\|w_1\| = \left| \frac{1}{\|v_1\|} \right| \cdot \|v_1\| = 1$)



• Wahl von w_i für $i \geq 2$:

Wähle erst mal

$$w_i' = v_i - \langle v_i, w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_i, w_2 \rangle \cdot w_2 - \dots - \langle v_i, w_{i-1} \rangle w_{i-1}$$

Beh: $w_i' \perp w_j$ für $j < i$

Bew: Für $j = 1$ ($j > 1$ analog):

$$\langle w_i', w_1 \rangle = \langle v_i - \langle v_i, w_1 \rangle w_1 - \langle v_i, w_2 \rangle w_2 - \dots, w_1 \rangle$$

$$= \langle v_i, w_1 \rangle - \langle v_i, w_1 \rangle \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{=1} - \langle v_i, w_2 \rangle \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{=0} - \underbrace{\dots}_{=0}$$

$$= \langle v_i, w_1 \rangle - \langle v_i, w_1 \rangle = 0$$

Setze jetzt $w_i := \frac{1}{\|w_i'\|} \cdot w_i'$. Dann gilt (ii), (iii).

Außerdem gilt (i), da $w_i \in \langle w_1, \dots, w_{i-1}, v_i \rangle_{\mathbb{K}}$

$$\subseteq \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i \rangle_{\mathbb{K}}$$

$\square$

Korollar 6.2.6: Jeder endl.-dim. euklidische oder unitäre VR besitzt mindestens eine Orthonormalbasis.

Korollar 6.2.7: Ist V ein endl.-dim. euklidischer oder unitärer VR, so existiert ein Isomorphismus $g: \mathbb{K}^n \longrightarrow V$, so dass gilt:

$$\left\langle g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right), g\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)\right\rangle = a_1\overline{b_1} + \dots + a_n\overline{b_n}$$

Bew: Wähle eine Orthonormalbasis (ONB) $v_1, \dots, v_n$ von V und definiere g so, dass
$g(e_i) = v_i$ für $i = 1, \dots, n$.

$$\left(\text{Also } g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \right)$$

Dann: $\left\langle g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right), g\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)\right\rangle = \langle a_1v_1 + \dots + a_nv_n, b_1v_1 + \dots + b_nv_n \rangle$

Da $(v_i)_i$ ONB:

$$= a_1\overline{b_1}\underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{=1} + a_1\overline{b_2}\underbrace{\langle v_1, v_2\rangle}_{=0} + \dots + a_1\overline{b_n}\underbrace{\langle v_1, v_n\rangle}_{=0}$$

$$+ \dots\dots$$

$$+ a_n\overline{b_1}\underbrace{\langle v_n, v_1\rangle}_{=0} + \dots\dots + a_n\overline{b_n}\underbrace{\langle v_n, v_n\rangle}_{=1}$$

$$= a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \dots + a_n\overline{b_n}$$

◁