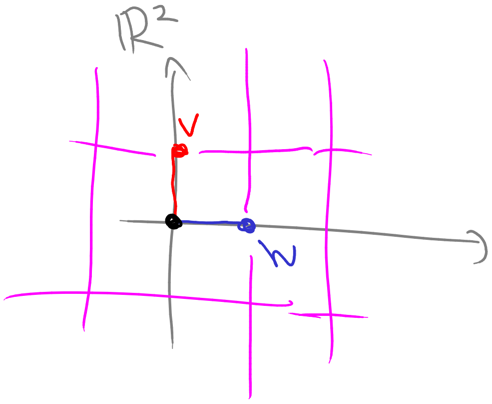
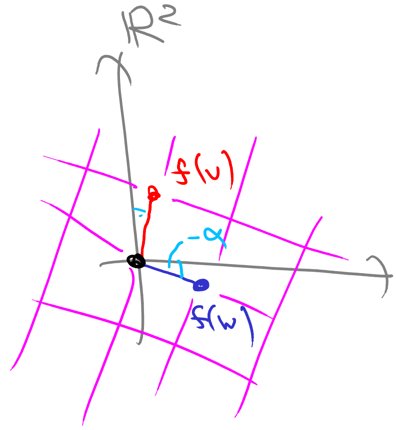
6.3 Orthogonale und unitäre Transformationen





Def 6.3.1: Sei V ein euklidischer VR. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt <u>orthogonale Transformation</u>, wenn f ein Isomorphismus ist und für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$.
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt <u>orthogonal</u>, wenn A als Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ eine orthogonale Transformation ist (bzgl. des std-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$).

Bsp: In $\mathbb{R}^2$: „Drehung um den Winkel α": $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Def 6.3.2: Sei V ein unitärer VR. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt <u>unitäre Transformation</u>, wenn f ein Isomorphismus ist und für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$.
Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt <u>unitär</u>, wenn A als Endomorphismus von $\mathbb{C}^n$ eine unitäre Transformation ist (bzgl. des std-Skalarprodukts auf $\mathbb{C}^n$).

Satz 6.3.3: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) A ist orthogonal.

(b) A ist invertierbar und es gilt $A^T = A^{-1}$

(c) Die Spalten von A bilden eine ONB.

$\Leftrightarrow A^T \cdot A = I_n$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\|$

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

(c) gilt nach Tutorium.

(b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 + \sin^2 & -\cos\cdot\sin + \sin\cdot\cos \\ -\sin\cdot\cos + \cos\cdot\sin & (-\sin)^2 + \cos^2 \end{pmatrix}$

Satz 6.3.4: Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) A ist unitär

(b) A ist invertierbar und es gilt $A^T = \bar{A}^{-1}$

(c) Die Spalten von A bilden eine ONB. $\Updownarrow$

$A^T \cdot \bar{A} = I_n$

Beh.: $(\bar{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$

Bew: Prüfe:

$$\begin{array}{ccc} \bar{A}\cdot\overline{(A^{-1})} & \overset{?}{=} & I_n \\ \| & & \| \\ \overline{A\cdot(A^{-1})} & = & \overline{I_n} \end{array}$$

Bew: (a) $\Leftrightarrow$ (b):

$$A \text{ unitär} \Leftrightarrow \forall v,w: \langle Av, Aw\rangle = \langle v,w\rangle$$

$$\langle Av, Aw\rangle = (Av)^T \cdot \overline{Aw} = v^T \underbrace{A^T \bar{A}}_{(b_{ij})_{i,j\le n}} \bar{w}$$

$$\langle v,w\rangle = v^T \cdot \bar{w}$$

$\Leftrightarrow A^T\bar{A} = I_n$

„$\Leftarrow$": klar.

„$\Rightarrow$": $b_{ij} = e_i^T A^T \bar{A}\, \bar{e}_j = e_i^T \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$

Also: $(b_{ij})_{i,j} = I_n$

(b) $\Leftrightarrow$ (c)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & \Big| & \cdots & \Big| & v_n \end{pmatrix}$$

i

$$A^T\bar{A} =: (b_{ij})_{i,j}$$

$$b_{ij} = a_{1i}\overline{a_{1j}} + a_{2i}\overline{a_{2j}} + \dots + a_{ni}\overline{a_{nj}} = v_i^T \bar{v}_j = \langle v_i, v_j\rangle$$

Also: $A^T\bar{A} = I_n \Leftrightarrow b_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$b_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$

$\Leftrightarrow (v_i)_i$ ist ONB. $\square$