Lineare Algebra I
Blatt 10

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 01.02.2020, 10:15 Uhr, im Auas

Aufgabe 1 (5 Punkte): Berechnen Sie die Determinanten der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -7 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

auf folgende Weise:
Berechnen Sie $\det(A)$ mittels der Formel von Sarrus (Korollar 5.1.6 (b)), $\det(B)$ mittels Gauß-Elimination (Lemma 5.1.3) und $\det(C)$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes (Satz 5.1.5).

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(i) Für welche Paare von Zahlen $0 \leq r, d \leq 3$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\mathrm{rk}(A) = r$ und $\det(A) = d$?

(ii) Für welche Elemente $x \in \mathbb{F}_{11}$ ist die Matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ x & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{11}^{3\times 3}$$

invertierbar?

(iii) Sei K ein Körper und seien $A, B \in K^{n\times n}$. Kann man die Determinante $\det(A+B)$ der Summe aus den einzelnen Determinanten $\det(A)$ und $\det(B)$ und der Zahl n bestimmen? Formaler ansgedrückt: Existiert eine Abbildung $f\colon K \times K \times \mathbb{N} \to K$, sodass die Gleichung $\det(A+B) = f(\det(A), \det(B), n)$ für alle Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ gilt?

Hinweis für Teil (ii): Bestimmen Sie $\det(A_x)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ und sei $\lambda \in K$.

(i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\det(\lambda A) = \lambda\det(A)$ im Allgemeinen nicht stimmt.

(ii) Korrigieren Sie die Gleichung aus (i):
Geben Sie eine Abbildung $f\colon K \times \mathbb{N} \to K$ an, sodass $\det(\lambda A) = f(\lambda, n)\det(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ gilt.

Aufgabe 4 (5+3 Punkte): Seien $A = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (b_{ij})_{i,j}$, $C = (c_{ij})_{i,j}$ und $D = (d_{ij})_{i,j}$ reelle $n \times n$-Matrizen. Dann können wir wie folgt eine reelle $(2n \times 2n)$-Matrix $M = (m_{kl})_{k,l}$ aufstellen:

$$m_{kl} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } k = i \text{ und } l = j \\ b_{ij} & \text{falls } k = i \text{ und } l = n + j \\ c_{ij} & \text{falls } k = n + i \text{ und } l = j \\ d_{ij} & \text{falls } k = n + i \text{ und } l = n + j \end{cases}.$$

Um es in anderen Worten auszudrücken, erhalten wir die Matrix M indem wir die Matrizen A, B, C und D wie folgt anordnen und dann als eine Matrix auffassen:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier solcher Matrizen

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

durch

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(ii) Herr Wittichs Cousin dritten Grades (namens Franz) behauptet nun die Formel

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$$

bewiesen zu haben, und zwar mit folgender Rechnung:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 - B^2) = \det((A + B)(A - B)) = \det(A + B)\det(A - B),$$

wobei er bei dem ersten Rechenschritt auf Korollar 5.1.6 (a) verweist. Helfen Sie Franz, indem Sie obigen Beweis kommentieren. Geben Sie dabei für jeden Rechenschritt eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(iii) Stimmt die Aussage, welche Franz zeigen möchte?

Hinweis für Teil (iii): Schauen Sie sich folgendes Matrixprodukt an:

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & A - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + B & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Bitte wenden

Einige Tipps zum generellen Bearbeiten:

• Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen

• Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst

• Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen

• Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen

• Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze

• Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können

• Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)

• Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich)

• Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen

• Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären

Bitte beachten Sie:

• Sie dürfen natürlich gerne mit Anderen zusammen an den Aufgaben arbeiten (das ist sogar ausdrücklich empfohlen, aber jeder soll die erarbeiteten Lösungen selbst (in eigenen Worten) aufschreiben und hochladen. Wenn mehrere Abgaben fast wörtlich gleich sind, können diese mit 0 Punkten bewertet werden

• Jede Aufgabe wird einzelnd im pdf-Format hochgeladen (z.B. abfotografiert, gescannt, ...)

• Bitte nummerieren Sie die Zeilen (oder Absätze oder ...), damit Korrektoren sich darauf beziehen können.

• Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei lesbar und richtig herum ist.