

Lineare Algebra I

Blatt 4

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 07.12.2020, 10:15 Uhr, im Aua

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\text{Sym}(X) := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

mit der Verkettung von Abbildungen und dem Element id_X eine Gruppe bildet. Diese Gruppe nennt man die Symmetrische Gruppe auf der Menge X .

Aufgabe 2 (5 Punkte): Auf der Menge \mathbb{R}^2 definieren wir die Relation

$$(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow y = y' \wedge \exists a \in \mathbb{R}: x' = x + ay$$

- (i) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
- (ii) Ist die Menge \mathbb{R}^2 / \sim endlich? Falls ja, geben Sie alle Elemente an. Falls nein, begründen Sie, warum dies nicht der Fall ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wir definieren auf $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ eine Äquivalenzrelation durch

$$A \sim B :\Leftrightarrow 3 \mid \#A - \#B$$

- (i) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation.
- (ii) Wir bezeichnen mit $\tilde{\sim}$ die Äquivalenzrelation \sim , aufgefasst als Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$. Existiert eine Bijektion zwischen den Mengen $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) / \sim$ und $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) / \tilde{\sim}$?

Aufgabe 4 (5+1 Punkte): Für zwei reelle Zahlen a und b definieren wir die Abbildung

$$f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b.$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Verkettung von Abbildungen eine assoziative Verknüpfung auf der Menge $\text{Agg}(\mathbb{R}) := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ definiert.
- (ii) Finden Sie ein neutrales Element $e \in \text{Agg}(\mathbb{R})$ bezüglich der Verkettung von Abbildungen.
- (iii) Auch auf der Menge $\text{Aff}(\mathbb{R}) := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0\}$ definiert die Verkettung von Abbildungen eine assoziative Verknüpfung mit neutralem Element e (aus dem vorherigen Aufgabenteil). Das dürfen Sie ab jetzt verwenden ohne es selbst zu begründen. Zeigen Sie, dass genau eines der beiden Tripel $(\text{Agg}(\mathbb{R}), \circ, e)$ und $(\text{Aff}(\mathbb{R}), \circ, e)$ eine Gruppe ist.
- (iv) Ist das Tripel aus dem dritten Aufgabenteil, welches eine Gruppe ist, sogar eine abelsche Gruppe?

Hinweis: **Grüne Punkte** funktionieren wie folgt: Die maximale Punktzahl ist weiterhin durch 20 Punkte gegeben, aber ein **grüner Punkt** kann einen Punkt, welchen man bei einer der vier Aufgaben verloren hat, ersetzen.

Bitte wenden

Einige Tipps zum generellen Bearbeiten:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen natürlich gerne mit Anderen zusammen an den Aufgaben arbeiten (das ist sogar ausdrücklich empfohlen, aber jeder soll die erarbeiteten Lösungen selbst (in eigenen Worten) aufschreiben und hochladen. Wenn mehrere Abgaben fast wörtlich gleich sind, können diese mit 0 Punkten bewertet werden
- Jede Aufgabe wird einzeln im pdf-Format hochgeladen (z.B. abfotografiert, gescannt, ...)
- Bitte nummerieren Sie die Zeilen (oder Absätze oder ...), damit Korrektoren sich darauf beziehen können.
- Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei lesbar und richtig herum ist.