

Lineare Algebra I

Blatt 5

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 14.12.2020, 10:15 Uhr, im Aua

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(i) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen jeweils in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

(1) $z_1 = \frac{1+3i}{3-2i} + \frac{2i}{3+i}$

(2) $z_2 = (1 - 2i)^5$

(3) $z_3 = \frac{3-i^{99}}{i} + \frac{2}{3+i^9}$

(ii) Zeigen Sie Satz 2.2.5 (e), d.h. zeigen Sie, dass $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ für jede komplexe Zahl z gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(i) Berechnen Sie im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

(1) $4(3 \cdot 30 - 2)$, wobei $n = 38$

(2) $542^{999999999}$, wobei $n = 543$

(3) $6^{-1} \cdot 5^2 + 3^{-1}2^{-1}$, wobei $n = 7$

Ihre Ergebnisse müssen dabei jeweils als eine der Zahlen $0, \dots, n - 1$ angegeben werden.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Multiplikation auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ assoziativ ist. Dieser Teil des Beweises des Satzes 2.1.12 wurde in der Vorlesung ausgelassen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Für jeden Körper K und für alle $a \in K$ gilt $2 \cdot a = a + a$, wobei $2 := 1 + 1$.

(ii) Der Körper \mathbb{F}_2 ist ein Unterkörper von dem Körper \mathbb{Q} .

(iii) Der Körper \mathbb{F}_2 ist ein Unterkörper von dem Körper \mathbb{F}_3 .

(iv) Es gibt genau 54 Polynome $f \in \mathbb{F}_3[x]$ mit $\deg(f) = 3$.

(v) Die Gradformel $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ aus Bemerkung 2.3.5 gilt auch für Polynome $f, g \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei (G, \cdot, e) ein Tripel bestehend aus einer Menge G , einer Verknüpfung \cdot auf G und einem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Tripel (G, \cdot, e) ist eine Gruppe.

(ii) Es gelten

(1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in G$.

(2) $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$.

(3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$.

Hinweis: Bei der Rückrichtung ist es sehr nützlich, in einer gewissen Reihenfolge vorzugehen.

Bitte wenden

Einige Tipps zum generellen Bearbeiten:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen natürlich gerne mit Anderen zusammen an den Aufgaben arbeiten (das ist sogar ausdrücklich empfohlen, aber jeder soll die erarbeiteten Lösungen selbst (in eigenen Worten) aufschreiben und hochladen. Wenn mehrere Abgaben fast wörtlich gleich sind, können diese mit 0 Punkten bewertet werden
- Jede Aufgabe wird einzeln im pdf-Format hochgeladen (z.B. abfotografiert, gescannt, ...)
- Bitte nummerieren Sie die Zeilen (oder Absätze oder ...), damit Korrektoren sich darauf beziehen können.
- Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei lesbar und richtig herum ist.