

Lineare Algebra I

Blatt 6

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 21.12.2020, 10:15 Uhr, im Auas

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen und definieren die Verknüpfungen

$$\otimes: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, (v, w) \mapsto vw$$

und

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, (\lambda, v) \mapsto v^\lambda.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_{>0}, \otimes)$ zusammen mit \odot als Skalarmultiplikation einen \mathbb{R} -Vektorraum bildet.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(i) Handelt es sich bei den folgenden Teilmengen um Untervektorräume?

(1) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4 \mid x + y - (z + w)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{Q}^4$

(2) $\{f \in \mathbb{C}[x] \mid f(i) = 1\} \subseteq \mathbb{C}[x]$, wobei wir $\mathbb{C}[x]$ als \mathbb{C} -Vektorraum auffassen

(3) $\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{i+2} = a_{i+1} + a_i \text{ für alle } i \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei die Addition und Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ komponentenweise definiert ist (wie bei \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$).

(ii) Ist die Vereinigung zweier Untervektorräume U und U' eines Vektorraumes V wieder ein Untervektorraum? Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei n eine positive natürliche Zahl und seien M und N zwei n -elementigen Mengen.

(i) Zeigen Sie per Induktion über n , dass eine injektive Abbildung $f: M \rightarrow N$ auch surjektiv sein muss.

(ii) Gilt diese Aussage auch, wenn wir die Wörter injektiv und surjektiv vertauschen?

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei V ein K -Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Sind $v, w \in V \setminus \{0\}$ mit $v \in \langle w \rangle$, so gilt auch $w \in \langle v \rangle$.

(ii) Sind A und B Teilmengen von V mit $A \subseteq \langle B \rangle$, so gilt $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

(iii) Für alle Teilmengen A und B von V gilt $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$.

(iv) Sind A und B Teilmengen mit $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$, so gilt $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ oder $\langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle$.

(v) Jeder Untervektorraum U von V ist Span einer Teilmenge $A \subseteq V$.

Bitte wenden

Einige Tipps zum generellen Bearbeiten:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen natürlich gerne mit Anderen zusammen an den Aufgaben arbeiten (das ist sogar ausdrücklich empfohlen, aber jeder soll die erarbeiteten Lösungen selbst (in eigenen Worten) aufschreiben und hochladen. Wenn mehrere Abgaben fast wörtlich gleich sind, können diese mit 0 Punkten bewertet werden
- Jede Aufgabe wird einzeln im pdf-Format hochgeladen (z.B. abfotografiert, gescannt, ...)
- Bitte nummerieren Sie die Zeilen (oder Absätze oder ...), damit Korrektoren sich darauf beziehen können.
- Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei lesbar und richtig herum ist.