

# Lineare Algebra I

## Blatt 7

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 11.01.2021, 10:15 Uhr, im Auas

---

### Aufgabe 1 (5 Punkte):

- (i) Überprüfen Sie  $(8, 2, 13), (1, 6, 2), (2, 3, 0) \in \mathbb{F}_5^3$  auf lineare Unabhängigkeit.
- (ii) Für welche reellen Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  sind  $x^2 + 2x + 1, 2x^2 - x, ax^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$  linear (un-)abhängig?
- (iii) Zeigen Sie, dass  $(1, 1, 1), (x, y, z), (x^2, y^2, z^2) \in \mathbb{R}^3$  für paarweise verschiedene reelle Zahlen  $x, y$  und  $z$  linear unabhängig ist.

### Aufgabe 2 (5 Punkte):

 Wir betrachten die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$  linear unabhängig ist.
- (ii) Ergänzen Sie  $(v_1, v_2, v_3)$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^4$ .
- (iii) Schreiben Sie die Standardbasisvektoren  $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{R}^4$  als Linearkombinationen Ihrer Basis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

### Aufgabe 3 (5 Punkte):

 Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) Ein einzelner Vektor  $v \in V$  ist linear unabhängig genau dann, wenn  $v \neq 0$ .
- (ii) Sind  $v_1, v_2 \in V$  linear abhängig, so existiert  $v \in V$  mit  $v_1, v_2 \in \langle v \rangle$ .
- (iii) Sind  $v_1, v_2, v_3 \in V$  paarweise linear unabhängig, so auch  $v_1, v_2, v_3$ .
- (iv) Sind  $v_1, v_2 \in V$  und  $v_2, v_3 \in V$  linear abhängig, so auch  $v_1, v_3$ , falls  $v_2 \neq 0$ .
- (v) Sind  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear unabhängig, so bilden sie eine Basis von  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ .

### Aufgabe 4 (5 Punkte):

 Bestimmen Sie die Anzahl der 1-dimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{F}_p^n$ . Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (i) Überlegen Sie sich, welche der Vektoren aus  $\mathbb{F}_p^n$  als Basis eines 1-dimensionalen Untervektorraumes von  $\mathbb{F}_p^n$  auftreten. Wie viele Vektoren sind das?
- (ii) Wie viele verschiedene Basen hat ein fixer 1-dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{F}_p^n$ ?
- (iii) Berechnen Sie nun die Anzahl der 1-dimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{F}_p^n$ .

**Aufgabe 5 (5 grüne Punkte):** Im Spezialmüsli-Geschäft der Weihnachtsellen kann man folgende Müsli-Mischungen nach Gewicht kaufen, welche frisch gemischt werden:

- Zimtus Maximus (1,60 Euro pro 100g): 40g magischer Zimt und 60g Weihnachtsflocken
- Schokobalance (2,50 Euro pro 100g): 45g Schokostückchen, 10g magischer Zimt und 45g Weihnachtsflocken
- Wüstenweihnacht (1,40 Euro pro 100g): 5g magischer Zimt, 5g Schokostückchen und 90g Weihnachtsflocken
- Perfekte Neujahrsdiät (2,00 Euro pro 100g): 80g Schokostückchen und 20g magischer Zimt

Am Ende eines Tages möchte die Geschäftsleiterin Frau Dr. 11 wissen, wieviel wovon verkauft wurde. Leider hat dies niemand aufgeschrieben, da alle damit beschäftigt waren, Weihnachtslieder zu singen.

- Jemand schlägt vor, das an aus den verbrauchten Zutaten auszurechnen. Warum klappt das nicht?
- Kann man es ausrechnen, wenn man zusätzlich die Tageseinnahmen zugrunde legt?
- Verkäufer Drölf hat sich bei seinem Lieblingmüsli doch gemerkt, wie viel insgesamt verkauft wurde. Zeigen Sie, dass man es damit ausrechnen kann, unabhängig davon, welches Müsli das Lieblingsmüsli von Verkäufer Drölf ist.

Hinweis: **Grüne Punkte** funktionieren wie folgt: Die maximale Punktzahl ist weiterhin durch 20 Punkte gegeben, aber ein **grüner Punkt** kann einen Punkt, welchen man bei einer der vier Aufgaben verloren hat, ersetzen.



## **Einige Tipps zum generellen Bearbeiten:**

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären

## **Bitte beachten Sie:**

- Sie dürfen natürlich gerne mit Anderen zusammen an den Aufgaben arbeiten (das ist sogar ausdrücklich empfohlen, aber jeder soll die erarbeiteten Lösungen selbst (in eigenen Worten) aufschreiben und hochladen. Wenn mehrere Abgaben fast wörtlich gleich sind, können diese mit 0 Punkten bewertet werden
- Jede Aufgabe wird einzeln im pdf-Format hochgeladen (z.B. abfotografiert, gescannt, ...)
- Bitte nummerieren Sie die Zeilen (oder Absätze oder ...), damit Korrektoren sich darauf beziehen können.
- Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei lesbar und richtig herum ist.