Lineare Algebra I
Blatt 8

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 18.01.2020, 10:15 Uhr, im Auas

Aufgabe 1 (5 Punkte): Gegeben seien die folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 3 & 1+i & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

(i) Geben Sie an, welche der neun Matrixprodukte $AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC$ laut Vorlesung definiert sind.

(ii) Berechnen Sie all die definierten Matrixprodukte des vorherigen Aufgabenteils.

(iii) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, welche nicht die Einheitsmatrix $I_5 \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ist und $A^5 = I_5$ erfüllt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei zudem $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Es gilt $f(0) = 0$.

(ii) Es gilt $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$.

(iii) Werden mindestens zwei Vektoren aus V auf den Nullvektor abgebildet, so bildet f jeden Vektor aus V auf den Nullvektor ab.

(iv) Ist $(v_i)_{i\in I} \in V^I$ so, dass $(f(v_i))_{i\in I} \in W^I$ linear unabhängig ist, so ist auch $(v_i)_{i\in I} \in V^I$ linear unabhängig.

(v) Ist $(v_i)_{i\in I} \in V^I$ eine Basis so, dass $(f(v_i))_{i\in I} \in W^I$ eine Basis ist, so ist f ein Isomorphismus.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Bestimmen Sie jeweils, ob es keine, eine oder mehrere lineare Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $f((3,-1)) = (0,2)$, $f((2,0)) = (1,1)$

(ii) f ist nicht injektiv und $f((3,-1)) = (1,0)$

(iii) f ist surjektiv und $f(\{(1,x) \mid x \in \mathbb{R}\})$ ist einelementig

(iv) $f(\{(x^2,x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{(1,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(v) $f((2,2)) = (2,0)$, $f((1,3)) = (1,1)$ und $f((-1,-7)) \neq (-1,-3)$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Seien V, W und U Vektorräume über einem Körper K und seien $f, g\colon V \to W$ und $h, j\colon W \to U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) $h \circ (f+g) = (h\circ f) + (h \circ g)$

(ii) $(h+j)\circ f = (h\circ f) + (j \circ f)$

und folgern Sie, dass für jeden Vektorraum V die Menge $\mathrm{Hom}(V,V)$ mit punktweiser Addition und Komposition einen Ring bildet.

Bitte wenden

Einige Tipps zum generellen Bearbeiten:

• Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen

• Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst

• Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen

• Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen

• Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze

• Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können

• Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)

• Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich)

• Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen

• Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären

Bitte beachten Sie:

• Sie dürfen natürlich gerne mit Anderen zusammen an den Aufgaben arbeiten (das ist sogar ausdrücklich empfohlen, aber jeder soll die erarbeiteten Lösungen selbst (in eigenen Worten) aufschreiben und hochladen. Wenn mehrere Abgaben fast wörtlich gleich sind, können diese mit 0 Punkten bewertet werden

• Jede Aufgabe wird einzelnd im pdf-Format hochgeladen (z.B. abfotografiert, gescannt, ...)

• Bitte nummerieren Sie die Zeilen (oder Absätze oder ...), damit Korrektoren sich darauf beziehen können.

• Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei lesbar und richtig herum ist.