

Lineare Algebra I

Blatt 9

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 25.01.2020, 10:15 Uhr, im Auas

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zeigen Sie exemplarisch, dass Elementarmatrizen invertierbar sind, indem Sie für folgende Elementarmatrizen aus $\mathbb{R}^{5 \times 5}$ jeweils die inverse Matrix angeben (und nachrechnen, dass es sich dabei wirklich um die Inverse handelt):

- (i) Die Matrix, welche die 1. und 4. Zeile vertauscht.
- (ii) Die Matrix, welche die 4. Zeile mit 3 multipliziert.
- (iii) Die Matrix, welche das (-2) -fache der 2. Zeile auf die 5. Zeile addiert.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix A vollen Rang hat (also $\text{rk}(A) = 3$ gilt) und bestimmen Sie anschließend die zu A inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Seien V , W und U Vektorräume über einem Körper K und seien $t: V \rightarrow W$ und $s: W \rightarrow U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

- (i) Das Bild $\text{im}(t)$ ist ein Untervektorraum von W .
- (ii) Die Komposition $s \circ t: V \rightarrow U$ ist linear.
- (iii) Die Abbildung $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, U)$, $f \mapsto s \circ f$ ist linear.
- (iv) Die Abbildung $\text{Hom}(W, U) \rightarrow \text{Hom}(V, U)$, $g \mapsto g \circ t$ ist linear.
- (v) Für jeden Vektor $v \in V$ ist die Abbildung $\text{Hom}(V, W) \rightarrow W$, $f \mapsto f(v)$ linear.

Bemerkung: Die Aussagen der Aufgabenteile (i) und (ii) wurden in der Vorlesung erwähnt, aber nicht bewiesen. Es genügt daher nicht, einfach auf das Skript zu verweisen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

- (i) Es gilt $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(V)$.
- (ii) Gilt $\dim(V) < \dim(W)$, so ist f nicht surjektiv.
- (iii) Gilt $\dim(V) > \dim(W)$, so ist f nicht injektiv.
- (iv) Gilt $\dim(V) = \dim(W)$, so ist f injektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

Einige Tipps zum generellen Bearbeiten:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären

Bitte beachten Sie:

- Sie dürfen natürlich gerne mit Anderen zusammen an den Aufgaben arbeiten (das ist sogar ausdrücklich empfohlen, aber jeder soll die erarbeiteten Lösungen selbst (in eigenen Worten) aufschreiben und hochladen. Wenn mehrere Abgaben fast wörtlich gleich sind, können diese mit 0 Punkten bewertet werden
- Jede Aufgabe wird einzeln im pdf-Format hochgeladen (z.B. abfotografiert, gescannt, ...)
- Bitte nummerieren Sie die Zeilen (oder Absätze oder ...), damit Korrektoren sich darauf beziehen können.
- Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei lesbar und richtig herum ist.