Aufgabe 1 (2 Punkte):

Listen Sie alle Elemente der Menge $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \#A = 2 \ \wedge \ A \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4\}\}$ auf. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \to \mathbb{Z}$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$.

(i) Geben Sie das Bild $\operatorname{im}(f)$ von f und das Urbild $f^{-1}(0)$ der Zahl $0 \in \mathbb{Z}$ unter f an. (Hier brauchen Sie Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(ii) Ist die Abbildung f injektiv? Ist die Abbildung f surjektiv?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass jeder Körper K ein Element a enthält, sodass

$$\forall b \in K \colon ab + b = 0$$

gilt, indem Sie nur die Körperaxiome und die Aussage „$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ für alle $a \in K$“ verwenden.

Zur Erinnerung:

- Die Körperaxiome sind: $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sind abelsche Gruppen und es gelten $a(b+c) = ab + ac$ und $(a + b)c = ac + bc$ für alle $a, b, c \in K$ (Distributivität).
- Die Axiome einer abelschen Gruppe $(G, \circ, e)$ sind: Es gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativität), $e \circ a = a = a \circ e$ für alle $a \in G$ (e ist neutrales Element), zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $a \circ b = e = b \circ a$ (Existenz von Inversen) und es gilt $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ (Kommutatitvät).

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Ist die Teilmenge $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f = 0 \vee \deg(f) = 3\}$ von $\mathbb{R}[x]$

(i) abgeschlossen unter Skalarmultiplikation, d. h. gilt $\lambda f \in U$ für alle $f \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$?

(ii) abgeschlossen unter Vektoraddition, d. h. gilt $f + g \in U$ für alle $f, g \in U$?

(iii) ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$?

Aufgabe 5 (4 Punkte):

Seien $v, w \in \mathbb{F}_5^3$ so, dass v und w linear unabhängig sind. Wie viele Vektoren $u \in \mathbb{F}_5^3$ gibt es, sodass u, v und w eine Basis von $\mathbb{F}_5^3$ bilden?

Hinweis: Es kann helfen, die Aufgabe erstmal im Spezialfall $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ zu lösen. (Auch für diesen Spezialfall gibt es Punkte.)

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Existieren Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) B = I_3$?

(Zur Erinnerung: I_3 ist die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$.)

Aufgabe 7 (4 Punkte):

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte):

Ist für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, bei denen alle Einträge gerade ganze Zahlen sind, die Determinante $\det(A)$ stets durch 2 teilbar? Ist sie stets durch 8 teilbar? Ist sie stets durch 64 teilbar?

Aufgabe 9 (4 Punkte):

Wir betrachten die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \\ -3 & -8 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A durch $\chi_A(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)$ gegeben ist.

(Bemerkung: Je nachdem, bei welchem Dozenten Sie die Vorlesung gehört haben, könnte das charakteristische Polynom auch $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ sein; das wird auch als Lösung akzeptiert.)

Aufgabe 10 (3 Punkte):

Welche der Axiome (Bilinearität, Symmetrie, positive Definitheit) eines Skalarproduktes erfüllt die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \left(\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)\right) \mapsto \det \left(\begin{smallmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{smallmatrix}\right)?$$