Lineare Algebra I
Blatt 1

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 16.11.2020, 10:15 Uhr, im Auas

Bitte beachten Sie, dass Sie Ihre Lösungen begründen sollen (das müssen Sie übrigens ab jetzt immer machen außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht machen müssen; daher lassen wir die explizite Aufforderung "Begründen Sie" auch weg)

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei n eine positive natürliche Zahl und seien $a_1, \dots, a_n$ beliebige (reelle) Zahlen. Welche der folgenden Aussagen besagen das Gleiche?

(i) Für alle natürlichen Zahlen i zwischen 1 und $n-1$ (inklusive) gilt $a_i \leq a_{i+1}$.

(ii) Für alle natürlichen Zahlen i und j zwischen 1 und n (inklusive) gilt $i < j$, falls $a_i \leq a_j$.

(iii) Die Zahlen $a_1, \dots, a_n$ sind der Größe nach sortiert, wobei die kleinste Zahl zuerst kommt.

Geben Sie zudem bei den Aussagen, welche nicht das gleiche besagen, ein Beispiel von Zahlen $a_1, \dots, a_n$ an, sodass eine der Aussagen wahr und die andere falsch ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Wir betrachten die Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

eines linearen Gleichungssystemes $\underline{L}$. Bringen Sie diese vermöge der Gauß-Elimination auf Zeilenstufenform.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sind $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_m)$ zwei Tupel von (reellen) Zahlen, so definieren wir deren Kästchensumme als

$$(a_1, \dots, a_n) \boxplus (b_1, \dots, b_m) := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m).$$

Die Kästchensumme nimmt also zwei Tupel und macht aus diesen ein neues Tupel, so wie auch die Addition zweier Zahlen wieder eine Zahl liefert. Nun können wir uns fragen, welche Eigenschaften die Kästchensumme hat.

(i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(a_1, \dots, a_n) \boxplus (b_1, \dots, b_m) = (b_1, \dots, b_m) \boxplus (a_1, \dots, a_n)$ im Allgemeinen nicht stimmt, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

(ii) Gilt dies wenigstens für manche Tupel? Können Sie ein Beispiel von zwei verschiedenen Tupeln angeben, sodass obige Gleichheit erfüllt ist?

Aufgabe 4 (5 Punkte): Definieren Sie selbst eine Verknüpfung $\circledast$, welche aus zwei Tupeln von Zahlen ein weiteres Tupel von Zahlen macht (wie die Kästchensumme in der letzten Aufgabe). Untersuchen Sie anschließend ebenfalls analog zur letzten Aufgabe, in welchem Rahmen die Gleichung

$$(a_1, \dots, a_n) \circledast (b_1, \dots, b_m) = (b_1, \dots, b_m) \circledast (a_1, \dots, a_n)$$

für beliebige Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_m)$ gilt.

Bitte wenden

Aufgabe 1

Behauptung: (i) und (iii) besagen das Gleiche, aber (ii) besagt nicht das Gleiche wie (i) und (iii)

(i) besagt, dass $a_i \leq a_{i+1}$ für alle nat. Zahlen i zwischen 1 und n-1 (inkl.) gilt. Anders ausgedrückt also, dass die Ungleichungen $a_1 \leq a_2$, $a_2 \leq a_3$, $a_3 \leq a_4$, ..., $a_{n-1} \leq a_n$ gelten, was wir wiederum als $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$ schreiben können. Das bedeutet also, dass die Zahlen $a_1 - a_n$ der Größe nach sortiert sind, wobei a_n die kleinste Zahl ist, was (iii) besagt.

Alternativ kann man auch $i = j$ wählen und somit einsehen, dass (ii) nie wahr ist

Kommt eine Zahl doppelt vor, also $a_i = a_j$ für zwei verschiedene i und j zwischen 1 und n (inkl.), so gelten $a_i \leq a_j$ und $a_j \leq a_i$, aber es kann nicht $i < j$ und $j < i$ gelten. Dies ist bei (i) und (iii) jedoch kein Problem solange die Zahlen dennoch der Größe nach (a_1 als kleinste Zahl) sortiert sind.

Konkretes Beispiel:
$n = 2$, $a_1 = 1 = a_2$. Dann sind (i) und (iii) wahr, da $a_1 \leq a_2$ gilt. Jedoch ist (ii) nicht wahr, da $a_2 \leq a_1$, aber nicht $2 < 1$ gilt.

Aufgabe 2

Wir verwenden die Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\leadsto \begin{array}{l} II - 3 \cdot I \\ III - 2 \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\leadsto \begin{array}{l} II \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \\ III \cdot \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right)$$

Aufgabe 3

(i) Wir betrachten die 1-Tupel
(1) und (2). Dann gelten
$(1) \boxplus (2) = (1,2)$
und
$(2) \boxplus (1) = (2,1)$
und somit $(1) \boxplus (2) \neq (2) \boxplus (1)$

(ii) Ja, gilt für manche Tupel, z.B. gilt

$$\underbrace{(1,\dots,1)}_{n\text{-Tupel}} \boxplus \underbrace{(1,\dots,1)}_{m\text{-Tupel}} = \underbrace{(1,\dots,1)}_{(n+m)\text{-Tupel}}$$

und

$$\underbrace{(1,\dots,1)}_{m\text{-Tupel}} \boxplus \underbrace{(1,\dots,1)}_{n\text{-Tupel}} = \underbrace{(1,\dots,1)}_{(n+m)\text{-Tupel}}$$

(sind bereits verschiedene Tupel)

genau (da nach versch. Tupeln gefragt war)
Klappt auch, falls eines der Tupel das leere Tupel ist:
Wir haben nämlich
$( ) \boxplus (a_1,\dots,a_n) = (a_1,\dots,a_n)$
und
$(a_1,\dots,a_n) \boxplus ( ) = (a_1,\dots,a_n)$

Aufgabe 4

Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Tupel (nicht das leere Tupel), so setzen wir $\text{length}((a_1, \ldots, a_n)) := n$. Zudem setzen wir $\text{length}(( )) = 0$. Nun definieren wir $*$ als

$$(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_m) := (\text{length}((a_1, \ldots, a_n)), \text{length}((b_1, \ldots, b_m))),$$

also als (n, m), falls $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_m)$ nicht das leere Tupel sind und als $\underbrace{(0, m)}_{\text{nur } (a_1, \ldots, a_n) \text{ leer}}$, $\underbrace{(n, 0)}_{\text{nur } (b_1, \ldots, b_m) \text{ leer}}$ und $\underbrace{(0, 0)}_{\text{beide leer}}$ in den anderen drei Fällen.

Die Gleichung $(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_m) = (b_1, \ldots, b_m) * (a_1, \ldots, a_n)$ gilt nicht immer:

Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ nicht leer, so gelten nämlich

$$(a_1, \ldots, a_n) * ( ) = (n, 0)$$

und

$$( ) * (a_1, \ldots, a_n) = (0, n),$$

sodass $(a_1, \ldots, a_n) * ( ) \neq ( ) * (a_1, \ldots, a_n)$

klappt natürlich genauso für beliebige Tupel unterschiedlicher Länge

Sind $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ Tupel gleicher Länge, so gilt $(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_n) = (b_1, \ldots, b_n) * (a_1, \ldots, a_n)$. Konkretes Bsp.:

$$\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n\text{-Tupel}} * \underbrace{(2, \ldots, 2)}_{n\text{-Tupel}} = (n, n)$$

und

$$\underbrace{(2, \ldots, 2)}_{n\text{-Tupel}} * \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n\text{-Tupel}} = (n, n)$$