Lineare Algebra I
Blatt 5

HHU Düsseldorf, WiSe 20/21

Abgabe bis Montag, 14.12.2020, 10:15 Uhr, im Auas

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(i) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen jeweils in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

(1) $z_1 = \frac{1+3i}{3-2i} + \frac{2i}{3+i}$
(2) $z_2 = (1-2i)^5$
(3) $z_3 = \frac{3-i^{99}}{i} + \frac{2}{3+i^9}$

(ii) Zeigen Sie Satz 2.2.5 (e), d.h. zeigen Sie, dass $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ für jede komplexe Zahl z gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(i) Berechnen Sie im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

(1) $4(3 \cdot 30 - 2)$, wobei $n = 38$
(2) $542^{9999999999}$, wobei $n = 543$
(3) $6^{-1} \cdot 5^2 + 3^{-1}2^{-1}$, wobei $n = 7$

Ihre Ergebnisse müssen dabei jeweils als eine der Zahlen $0, \ldots, n-1$ angegeben werden.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Multiplikation auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ assoziativ ist. Dieser Teil des Beweises des Satzes 2.1.12 wurde in der Vorlesung ausgelassen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Für jeden Körper K und für alle $a \in K$ gilt $2 \cdot a = a + a$, wobei $2 := 1 + 1$.

(ii) Der Körper $\mathbb{F}_2$ ist ein Unterkörper von dem Körper $\mathbb{Q}$.

(iii) Der Körper $\mathbb{F}_2$ ist ein Unterkörper von dem Körper $\mathbb{F}_3$.

(iv) Es gibt genau 54 Polynome $f \in \mathbb{F}_3[x]$ mit $\deg(f) = 3$.

(v) Die Gradformel $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ aus Bemerkung 2.3.5 gilt auch für Polynome $f, g \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $(G, \cdot, e)$ ein Tripel bestehend aus einer Menge G, einer Verknüpfung $\cdot$ auf G und einem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Tripel $(G, \cdot, e)$ is eine Gruppe.

(ii) Es gelten

(1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in G$.
(2) $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$.
(3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$.

Hinweis: Bei der Rückrichtung ist es sehr nützlich, in einer gewissen Reihenfolge vorzugehen.

Bitte wenden

Aufgabe 1

(i)

(1)

$$z_1 = \frac{1+3i}{3-2i} + \frac{2i}{3+i} = \frac{(1+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} + \frac{2i(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{3+2i+9i-6}{3^2+2^2} + \frac{6i+2}{3^2+1^2}$$

$$= \frac{-3+11i}{13} + \frac{2+6i}{10}$$

$$= \frac{-30+110i}{130} + \frac{26+78i}{130}$$

$$= \frac{-4+188i}{130}$$

$$= -\frac{2}{65} + i\,\frac{94}{65}$$

(2)

$$z_2 = (1-2i)^5 = \left((1-2i)^2\right)^2 (1-2i)$$

$$= \underbrace{(1-4i-4)}_{-3-4i}{}^2\,(1-2i)$$

$$= \underbrace{(9 + 24i - 16)}_{-7+24i}(1 - 2i)$$

$$= -7 + 24i + 14i + 48$$

$$= 41 + 38i$$

(3)

$$z_3 = \frac{3 - i^{95}}{i} + \frac{2}{3 + i^9} = \frac{3 - (i^2)^{49} i}{i} + \frac{2}{3 + (i^2)^4 i}$$

$$= \frac{3 + i}{i} + \frac{2}{3 + i}$$

$$= \frac{(3+i)(-i)}{i(-i)} + \frac{2(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{-3i + 1}{1} + \frac{6 - 2i}{3^2 + 1^2}$$

$$= \frac{-30i + 10 + 6 - 2i}{10}$$

$$= \frac{8}{5} - i\,\frac{16}{5}$$

(ii)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)\overline{(x+iy)} = (x+iy)(x-iy)$$

$$= x^2 - i\cancel{x}y + i\cancel{x}y \underbrace{-i^2}_{1} y^2$$

$$= x^2 + y^2$$

$$= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$= |z|^2$$

Aufgabe 2

(i)

(1)

Wir rechnen in $\mathbb{Z}/38\mathbb{Z}$:

$$4\cdot(3\cdot 30-2) = 4(90-2) = 4(14-2)$$
$$= 4\cdot 12$$
$$= 48$$
$$= 10$$

(2)

Wir rechnen in $\mathbb{Z}/543\mathbb{Z}$:

$$542^{99999999999} = (-1)^{99999999999} = (-1) = 542$$

(3)

Wir rechnen in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$6^{-1}\cdot 5^2 + 3^{-1}\, 2^{-1} = 6\cdot 5^2 + 5\cdot 4$$
$$= 6\cdot 25 + 20$$

NR:
$6\cdot 6 = 1$
$3\cdot 5 = 1$
$2\cdot 4 = 1$

$$= 6 \cdot 4 - 1$$

$$= 23$$

$$= 2$$

(ii)

Seien $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} = \overline{ab} \cdot \bar{c} = \overline{(ab) \cdot c} = \overline{a(bc)}$$

Assoz. von „·" in $\mathbb{Z}$

$$= \bar{a} \cdot \overline{bc}$$

$$= \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}),$$

sodass die Multiplikation auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ assoziativ ist.

Aufgabe 3

(i) ist wahr

Sei K ein Körper und sei $a \in K$. Dann gilt

$$2 \cdot a \overset{\text{Def.}}{\underset{\text{von } 2}{=}} (1+1) \cdot a \overset{\text{Distr.}}{=} 1 \cdot a + 1 \cdot a \overset{1 \text{ ist}}{\underset{\text{neutral bzgl. „}\cdot\text{"}}{=}} a + a.$$

(ii) ist falsch

Denn

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}}_{\text{keine Elemente von } \mathbb{Q}} \}$$

ist nicht einmal eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$

(iii) ist falsch

Denn

$$\mathbb{F}_2 = \{\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}\}$$

und

$$\mathbb{F}_3 = \{\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}, \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},$$
$$\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}\},$$

sodass $\mathbb{F}_2 \not\subset \mathbb{F}_3$.

(iv) ist wahr

Wir zählen die Polynome $f \in \mathbb{F}_3[x]$ mit $\deg(f) = 3$.

Sei also $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i \in \mathbb{F}_3[x]$. Dann hat f Grad 3 genau dann, wenn $a_i = 0$ für alle $i \geq 4$ und $a_3 \neq 0$. Somit ist f von der Form

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_3 \neq 0$. Somit bleiben für a_3 zwei Möglichkeiten und für a_2, a_1 und a_0 jeweils drei Möglichkeiten. Also gibt es

$$2 \cdot 3^3 = 54$$

Polynome $f \in \mathbb{F}_3[x]$ mit $\deg(f) = 3$.

(v) ist falsch

Sieht man bereits für konstante Polynome:

$$\underset{\text{Grad } 0}{2 \cdot 3} = 6 = \underset{\text{Grad } -\infty}{0}$$

Alternatives Gegenbsp.:

$$(2x+1)(3x+1) = 6x^2 + 5x + 1 = 5x + 1$$

Grad 1 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ Grad 1

Aufgabe 4

„(i) ⇒ (ii)":

Dass G eine Gruppe ist bedeutet dass die Verknüpfung „·" assoziativ ist, ein beidseitig neutrales Element $e \in G$ existiert und, dass jedes Element $a \in G$ ein beidseitiges Inverses besitzt. Anders formuliert also:

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$
- $e \cdot a = a = a \cdot e$ für alle $a \in G$
- zu jedem $a \in G$ ex. ein $b \in G$ mit $a \cdot b = e = b \cdot a$

Insbesondere gelten also die drei Bedingungen von (ii).

„(ii) ⇒ (i)":

Nach (1) ist die Multiplikation assoziativ. Wir müssen also nur noch die Existenz eines beidseitigen neutralen Elementes und beidseitiger inverser Elemente zeigen.

Zeigen zunächst, dass linksinverse Elemente auch rechtsinvers sind! Seien also $a, b \in G$ mit $ba = e$

Dann gilt auch ex. nach (3)

$$(ab)(ab) = a(ba)b = a \cdot e \cdot b = a(e \cdot b) = ab.$$

Multiplikation mit einem Linksinversen c von ab liefert

$$\underbrace{\underbrace{c\cdot(ab)}_{e}(ab)}_{\overset{e\text{ links-}}{\underset{\text{neutral}}{=}}\ ab} = c(ab) = e$$

Somit ist b auch rechtsinvers.

Nun zeigen wir, dass ein linksneutrales Element

ex. nach (2)

auch rechtsneutral ist. Sei also $e \in G$ mit $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$. Sei nun $a \in G$ und wähle ein beidseitiges Inverses $b \in G$ von a.

Existenz eben gezeigt

Es gilt also $ab = e = ba$. Dann gilt

$$a \cdot e = a(ba) = (ab)a = e \cdot a \overset{e\text{ links-}}{\underset{\text{neutral}}{=}} a$$

Somit ist e auch rechtsneutral. und G insgesamt eine Gruppe.