Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2020/21

Probeklausur Lineare Algebra I

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Klausuren entsprechen; garantieren kann ich dafür natürlich nicht. (Die Aufgaben decken auch nicht unbedingt alle Bereiche ab; sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.)

Aufgabe 1:

Listen Sie alle Elemente der Menge $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \sum_{a \in A} a = 2\}$ auf. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (Zur Erinnerung: Wir fassen auch 0 als natürliche Zahl auf.)

Die Elemente der Menge $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \sum_{a \in A} a = 2\}$ sind:

- $\{2\}$
- $\{0, 2\}$

Aufgabe 2:

Seien X und Y Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Seien zudem A und B Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ im Allgemeinen nicht gilt.

Betrachte die Mengen $X = \{0,1\}$ und $Y = \{2\}$ und die Abbildung $f: X \to Y,\ x \mapsto 2$

Dann gelten

$$f(\{0\} \cap \{1\}) = f(\emptyset) = \emptyset$$

und

$$f(\{0\}) \cap f(\{1\}) = \{2\} \cap \{2\} = \{2\},$$

sodass $f(\{0\} \cap \{1\}) \neq f(\{0\}) \cap f(\{1\})$.

Aufgabe 3:

Seien G und H Gruppen und sei $f\colon G \to H$ eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(gg') = f(g)f(g')$ für alle $g, g' \in G$ gilt. Zeigen Sie, dass die inverse Abbildung $f^{-1}\colon H \to G$ diese Eigenschaft auch besitzt, also dass $f^{-1}(hh') = f^{-1}(h)f^{-1}(h')$ für alle $h, h' \in H$ gilt.

Seien $h, h' \in H$. Da f als bijektive Abbildung insbesondere surjektiv ist, existieren $g, g' \in G$ mit $f(g) = h$ und $f(g') = h'$. Wir erhalten nun

$$f^{-1}(hh') = f^{-1}(f(g)f(g')) = \underbrace{f^{-1}(f}_{= id_G}(gg')) = gg'$$

Eigenschaft der Abb. f aus der Aufgabe

$$= f^{-1}(f(g))f^{-1}(f(g'))$$

$$= f^{-1}(h)f^{-1}(h').$$

Aufgabe 4:

Ist die Abbildung $\epsilon_2 \colon \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}, f \mapsto f(2)$ linear?

Ja, denn es gilt

$$\epsilon_2\left(\lambda \sum_{i\in I} a_i x^i + \sum_{i\in I} b_i x^i\right) \underset{\text{Struktur von } \mathbb{R}[x]}{\overset{\text{Vektorraum-}}{=}} \epsilon_2\left(\sum_{i\in I} (\lambda a_i + b_i) x^i\right)$$

$$= \sum_{i\in I} (\lambda a_i + b_i) 2^i$$

$$\overset{\text{Körperaxiome}}{=} \lambda \sum_{i\in I} a_i 2^i + \sum_{i\in I} b_i 2^i$$

$$= \lambda\, \epsilon_2\left(\sum_{i\in I} a_i x^i\right) + \epsilon_2\left(\sum_{i\in I} b_i x^i\right)$$

für alle Polynome $\underbrace{\sum_{i\in I} a_i x^i, \sum_{i\in I} b_i x^i}_{\text{es sind also nur endlich viele der Koeffizienten ungleich Null.}} \in \mathbb{R}[x]$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5:

Wir betrachten die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu v_2 + \eta v_3 = 0$, wobei mindestens einer der drei Skalare ungleich Null sein muss.

Wir wenden Gauß-Elimination an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 14 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-4\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wähle $\eta = 1$. Dann erhalten wir

$$1\mu + 3\underbrace{\eta}_{=1} = 0$$

und somit $\mu = -3$ und

$$1\lambda + 2\underbrace{\mu}_{=-3} + 1\underbrace{\eta}_{=1} = 0,$$

sodass $\lambda = 5$. Es gilt also

$$5v_1 - 3v_2 + v_3 = 0.$$

alle ungleich Null

Aufgabe 6:

Wir betrachten die Teilmenge D_2 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, die aus denjenigen Matrizen besteht, die genau einen Eintrag ungleich Null haben. Existieren $A, B \in D_2$ mit $\mathrm{rk}(AB) = \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$? Existieren $A, B \in D_2$ mit $\mathrm{rk}(AB) < \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$?

Betrachte $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A = B.$$

Da A, B und AB in Normalform sind, erhalten wir mit Satz 4.3.6, dass $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(AB) = 1$.

Somit gilt $\mathrm{rk}(AB) = 1 = \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$. Es existieren also Matrizen $A, B \in D_2$ mit $\mathrm{rk}(AB) = \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$.

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hat Normalform $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also auch Rang 1.

Nun gilt also nach Satz 4.3.6

$\mathrm{rk}(AB) = 0$

und

$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = 1 = \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$,

sodass Matrizen $A, B \in D_2$ existieren, welche

$\mathrm{rk}(AB) < \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$

erfüllen.

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Dimension des Kernes der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Nach Satz 4.2.14(b) (Rangsatz) gilt

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = rk(A) + \dim(ker(A))$$

und somit

$$\dim(ker(A)) = 4 - rk(A).$$

Es genügt also $rk(A)$ zu bestimmen. Wir wenden also die Gauß-Elimination an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{III+2I}{\overset{II-I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\rightsquigarrow}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}}$$

hat also Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix},$$

sodass $rk(A) = 3$ nach Satz 4.3.6

Es gilt demnach $\dim(ker(A)) = 4 - 3 = 1$.

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$. Ist die Matrix A invertierbar?

Wir wenden Gauß-Elimination an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\underline{IV} + 2\underline{I}}{\overset{\underline{II} + \underline{I}}{\underset{\underline{III} + 2\underline{I}}{\rightsquigarrow}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\underline{IV} + 2\underline{II}}{\overset{\underline{III} + \underline{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\underline{IV} + 2\underline{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 5.1.4 (c) gilt also

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{5.1.7}{\overset{\text{Korollar}}{=}} 2.$$

Da $\det(A) = 2 \neq 0$, ist A nach Satz 5.1.4 (b) invertierbar.

Aufgabe 9:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie A^{2021}. Hinweis: Prüfen Sie zuerst, dass $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Da

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nun erhalten wir

$$A^{2021} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots}_{= I_2} \cdots \underbrace{\cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2021 \text{ mal}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2021}}_{= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da 2021 ungerade

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

Konkret also

$$A^{2021} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10:

Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = u^T \left(\begin{smallmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ auf $\mathbb{R}^2$. (Sie dürfen also verwenden, dass das ein Skalarprodukt ist.) Für welche reelle Zahlen a ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ orthogonal zu $\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Es gilt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 6a + 2,$$

sodass $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ gilt genau dann, wenn $a = -\frac{1}{3}$.

Somit sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ nur für die reelle Zahl $a = -\frac{1}{3}$ orthogonal zueinander.