Aufgabe 1 (2 Punkte):

Listen Sie alle nicht-leeren Teilmengen A von $\mathbb{N}$ auf, für die die folgende Aussage wahr ist:

$$\forall a \in A \colon \exists b \in A \colon a + b = 2$$

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (Zur Erinnerung: Wir fassen auch 0 als natürliche Zahl auf.)

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Zeigen Sie, dass nicht-leere Mengen A, B und C und nicht-bijektive Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ existieren, sodass die Verkettung $g \circ f$ bijektiv ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass $\lambda u + u' \in U$ für alle $u, u' \in U$ und $\lambda \in K$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass U nicht leer ist genau dann, wenn $0 \in U$ ist.

(ii) Folgern Sie, dass eine Teilmenge U von V genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn sie nicht leer ist und $\lambda u + u' \in U$ für alle $u, u' \in U$ und $\lambda \in K$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraumes $U = \langle (x, 2x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \rangle_{\mathbb{R}}$ von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5 (4 Punkte):

Stellen Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ in der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ dar, d. h. geben Sie an, wie v als Linearkombination dieser Basisvektoren geschrieben werden kann. (Sie brauchen nicht zu beweisen, dass die obige Basis wirklich eine Basis ist.)

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Existiert eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass die zum Produkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ zugeordnete lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Nullabbildung ist?

Aufgabe 7 (4 Punkte):

Bestimmen Sie das Inverse der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$. Geben Sie dabei in der gesamten Rechnung alle auftretenden Elemente von $\mathbb{F}_5$ immer in der Form $0, \ldots, 4$ an.

Aufgabe 8 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass die Determinante einer orthogonalen Matrix entweder 1 oder -1 ist.
Erinnerung: Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, falls sie invertierbar ist und $A^{-1} = A^T$ gilt.

Aufgabe 9 (4 Punkte):

Wir betrachten die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie für einen Eigenwert von A (Ihrer Wahl) die Menge aller zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 10 (4 Punkte):

Sei V ein euklidischer Vektorraum (also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt) und seien $u, v, w \in V$ so, dass $v \perp u$ und $w \perp u$ gilt. Rechnen Sie nach, dass

$$\|4v - u\|^2 - \|u - 4w\|^2 = 16(\|v\|^2 - \|w\|^2)$$

gilt.