Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2020/21

Probeklausur Lineare Algebra I

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Klausuren entsprechen; garantieren kann ich dafür natürlich nicht. (Die Aufgaben decken auch nicht unbedingt alle Bereiche ab; sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.)

Aufgabe 1:

Listen Sie alle Elemente der Menge $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \sum_{a \in A} a = 2\}$ auf. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (Zur Erinnerung: Wir fassen auch 0 als natürliche Zahl auf.)

Aufgabe 2:

Seien X und Y Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Seien zudem A und B Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 3:

Seien G und H Gruppen und sei $f\colon G \to H$ eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(gg') = f(g)f(g')$ für alle $g, g' \in G$ gilt. Zeigen Sie, dass die inverse Abbildung $f^{-1}\colon H \to G$ diese Eigenschaft auch besitzt, also dass $f^{-1}(hh') = f^{-1}(h)f^{-1}(h')$ für alle $h, h' \in H$ gilt.

Aufgabe 4:

Ist die Abbildung $\epsilon_2 \colon \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}, f \mapsto f(2)$ linear?

Aufgabe 5:

Wir betrachten die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu v_2 + \eta v_3 = 0$, wobei mindestens einer der drei Skalare ungleich Null sein muss.

Aufgabe 6:

Wir betrachten die Teilmenge D_2 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, die aus denjenigen Matrizen besteht, die genau einen Eintrag ungleich Null haben. Existieren $A, B \in D_2$ mit $\mathrm{rk}(AB) = \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$? Existieren $A, B \in D_2$ mit $\mathrm{rk}(AB) < \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$?

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Dimension des Kernes der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$. Ist die Matrix A invertierbar?

Aufgabe 9:

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie A^{2021}. Hinweis: Prüfen Sie zuerst, dass $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

Aufgabe 10:

Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = u^T \left(\begin{smallmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ auf $\mathbb{R}^2$. (Sie dürfen also verwenden, dass das ein Skalarprodukt ist.) Für welche reelle Zahlen a ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ orthogonal zu $\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$?