Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2020/21

Hier sind noch ein paar Aufgaben, die übrig waren beim Erstellen der Klausuren. Es handelt sich also prinzipiell um Aufgaben im Klausur-Stil; zum Teil sind sie evtl. etwas schwerer als Klausuraufgaben, aber eine gute Übung sind sie sicher trotzdem.

Aufgabe 1:

Listen Sie alle Elemente der folgenden Menge auf: $\{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N} \colon (y < x \Rightarrow y \text{ ist Quadratzahl})\}$ (Zur Erinnerung: Wir fassen auch 0 als natürliche Zahl auf.)

Aufgabe 2:

Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Listen Sie alle Elemente der folgenden Menge auf:$\{f^{-1}(x) \mid x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$

Aufgabe 3:

Listen Sie alle Elemente der folgenden Menge auf: $\{A \subseteq \mathbb{F}_3 \mid \forall a \in A \colon a^2 \in A\}$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $\mathbb{Q}^\times$ eine Äquivalenzrelation ist: $a \sim b :\iff \exists c \in \mathbb{Q}^\times \frac{a}{b} = c^2$.

Aufgabe 5:

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $K^n \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation ist: $u \sim v :\iff u$ und v sind linear abhängig.

Aufgabe 6:

Listen Sie alle Elemente der folgenden Menge auf: $\{(A, B) \mid A \subsetneq B \subseteq \{1, 2\}\}$

Aufgabe 7:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Seien A und B Mengen, sei $f \colon A \to B$ eine Abbildung und seien A_1 und A_2 Teilmengen von A. Dann gilt $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Aufgabe 8:

Ist $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = 1\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$?

Aufgabe 9:

Ist der Polynomring $\mathbb{R}[x]$ ist Körper?

Aufgabe 10:

Zeigen Sie: Sind U und V zwei-dimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$, so ist $U \cap V \neq \{0\}$.

Aufgabe 11:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ und sind sowohl u, v als auch v, w linear unabhängig, so müssen u, w linear abhängig sein.

Aufgabe 12:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^4$ so, dass u, v linear abhängig sind, u, w auch linear abhängig, aber v, w linear unabhängig, so ist $u = 0$.

Aufgabe 13:

Zeigen Sie: Ist K ein Körper und $U \subset K^n$ ein d-dimensionaler Untervektorraum, so existiert ein homogenes LGS L mit $n - d$ Gleichungen, so dass U genau die Lösungsmenge von L ist.

Aufgabe 14:

Sei $Ax = b$ ein beliebiges LGS (also nicht notw. homogen) und seien u, v, w Lösugen davon. Zeigen Sie: Dann ist auch $u + v - w$ eine Lösung.

Aufgabe 15:

Sei $Ax = b$ ein beliebiges LGS (also nicht notw. homogen) und seien u, v Lösugen davon. Zeigen Sie: Dann ist auch $u2 - v$ eine Lösung.

Aufgabe 16:

Sei $Ax = b$ ein LGS mit n Gleichungen und n Variablen über $\mathbb{R}$. Die Matrix $A^{n\times n}$ sei nicht invertierbar. Kann die Anzahl der Lösungen 0 / 1 / ∞ sein?

Aufgabe 17:

Ist die Abbildung $K^{n\times n} \to K^{n\times n}, A \mapsto A^T$ linear?

Aufgabe 18:

Ist die Abbildung $\mathbb{C}^{n\times n} \to K^{n\times n}, A \mapsto \bar{A}$ linear (wobei $\bar{A}$ die Matrix ist, bei der alle Einträge komplex konjugiert wurden)?

Aufgabe 19:

Wahr oder falsch: Sind $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ so, dass $\mathrm{im}\, f \subset \ker g$, so ist $g \circ f = 0$.

Aufgabe 20:

Wahr oder falsch: Sind $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ so, dass $\mathrm{im}\, f \cap \ker g = \{0\}$, so ist $g \circ f$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 21:

Ist die Abbildung $x \mapsto \det(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right))$ linear?

Aufgabe 22:

Zeigen Sie, dass die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ nicht ähnlich sind.

Aufgabe 23:

Sind die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ähnlich?

Aufgabe 24:

Sind die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ähnlich?

Aufgabe 25:

Zeigen Sie: Ist A ähnlich zu I_n, so ist $A = I_n$.

Aufgabe 26:

Gibt es auf $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt, so dass $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = 0$ ist?

Aufgabe 27:

Gibt es auf $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt, so dass $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle = 0$ ist?