Lineare Algebra 1 – Blatt 10

Abgabe bis 6.1.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren und sei $f\colon K^n \to V$ die (eindeutige) lineare Abbildung, die e_i auf v_i abbildet für $i = 1, \dots, n$ (wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von K^n ist). Zeigen Sie:

(a) f ist injektiv genau dann wenn $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.

(b) f ist surjektiv genau dann wenn $\langle v_1, \dots, v_n\rangle_K = V$ ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Bemerkung 4.2.15 wurde in der Vorlesung nur teilweise gezeigt. Zeigen Sie: $\langle v_1, \dots, v_n\rangle_K = V$ gdw. $\langle w_1, \dots, w_n\rangle_K = W$.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

In jedem der folgenden Fälle: Bestimmen Sie, ob es keine, eine oder mehrere lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Wenn es mehrere gibt, geben Sie zwei konkrete Beispiele solcher Abbildungen an.

(a) $f_1(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $f_1(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(b) $f_2(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $f_2(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ und $f_2(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

(c) f_3 ist nicht injektiv und $f_3(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

(d) $f_4(\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$

(e) $f_6(\{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\})$ ist ein einziges Element von $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $U = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3$. Wir betrachten den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^3/U$ und schreiben $\bar{v} \in \mathbb{R}^3/U$ für das Bild von $v \in \mathbb{R}^3$ unter der kanonischen Abbildung.

(a) Die folgenden Vektoren lassen sich zu Paaren v_i, v_j gruppieren, die jeweils das selbe Element von $\mathbb{R}^3/U$ repräsentieren (also, so, dass $\bar{v}_i = \bar{v}_j$ gilt). Geben Sie die entsprechende Paarung an.

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix}3\\6\\44\end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix}1\\11\\111\end{pmatrix} \qquad v_5 = \begin{pmatrix}0\\9\\81\end{pmatrix} \qquad v_6 = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie einen Vektor v_7 der Form $\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}$ an, so dass $\bar{v}_7 = \bar{v}_6$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Vektor aus $\mathbb{R}^3/U$ genau einen Repräsentanten der Form $\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}$ hat, für $r \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3/U, r \mapsto \overline{\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}}$ ein Isomorphismus ist.

(e) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ an.

Aufgabe 5 (4 Punkte für Quiz-Teilnahme):

Nehmen Sie am Quiz auf der Ilias-Seite der Vorlesung (https://ilias.hhu.de/goto.php?target=crs_1734937&client_id=UniRZ) teil. Dafür bekommen Sie alle Punkte auf diese Aufgabe – egal, wie Sie abschneiden. (Mit dem Quiz können Sie rausfinden, ob Sie zumindest die ganz grundlegenden Dinge verstanden haben.)

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/