Lineare Algebra 1 – Blatt 11

Abgabe bis 13.1.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper, seien V und W zwei endich-dimensionale K-Vektorräume und sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie: Es existieren Basen $(v_j)_j$ und $(w_i)_i$ von V bzw. W, so dass die Matrix von f bezüglich dieser Basen die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

hat, wobei die Anzahl der 1en gleich $\operatorname{rk} f$ ist.

Hinweis: Fangen Sie damit an, eine Basis von $\ker f$ zu wählen und diese zu einer Basis von V zu ergänzen.

Aufgabe 2 (2+1+2+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $\operatorname{im} A$, den Kern $\ker A$ und überprüfen Sie, dass beide Definitionen von $\operatorname{rk} A$ aus Definition 4.3.6 in diesem Beispiel übereinstimmen.

(b) Wenn $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix mit $\operatorname{rk} B = 2$ ist, was kann dann laut Sylvesters Rang-Ungleichung der Rang der Verknüpfung BA sein?

(c) Geben Matrizen $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ vom Rang 2 an, so dass B_1A den (laut (b)) minimal möglichen Rang hat und B_2A den (laut (b)) maximal möglichen Rang.

(d) Was ist der maximale Rang einer Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $CA = 0$ ist? Geben Sie eine solche Matrix C an.

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie (indem Sie $\operatorname{rk} f$ betrachten):

(a) Ist $\dim V = \dim W$, so ist f surjektiv genau dann wenn f injektiv ist.

(b) Ist $\dim V > \dim W$, so ist f nicht injektiv.

(c) Ist $\dim V < \dim W$, so ist f nicht surjektiv.

Aufgabe 4 (1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Die vorige Aufgabe suggeriert, dass eine lineare Abbildung von einem Vektorraum V in sich selbst genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist. In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass dies im Allgemeinen falsch ist. (Es ist nur unter der zusätzlichen Annahme wahr, dass V endlich-dimensional ist.) Wir arbeiten im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome über $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie unendlich viele linear unabhängige Elemente von $\mathbb{R}[x]$ an (um zu sehen, dass $\mathbb{R}[x]$ unendlich-dimensional ist).

(b) Sei $h\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ die Abbildung, die ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ auf seine Ableitung f' abbildet. Zeigen Sie, dass h linear ist. (Was genau ist dazu zu prüfen?)

(c) Bestimmen den Kern von h. Ist h injektiv?

(d) Bestimmen Sie das Bild von h. Ist h surjektiv?

Aufgabe 5 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Zeigen Sie exemplarisch, dass Elementarmatrizen invertierbar sind, indem Sie für folgende Elementarmatrizen $E_i \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ jeweils die inverse Matrix E_i^{-1} angeben. (Begründen Sie auch, warum die von Ihnen angegebene Matrix die Inverse ist, z. B. durch nachrechnen.)

(a) E_1 ist die Matrix, die die 2. und 4. Zeile vertauscht.

(b) E_2 ist die Matrix, die die 3. Zeile mit 3 multipliziert.

(c) E_3 ist die Matrix, die das 3-fache der 4. Zeile zur 1. Zeile addiert.

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/`