

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Solche Matrizen nennt man *obere Dreiecksmatrizen*.)

Zeigen Sie, dass für solche Matrizen gilt: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie mit Verfahren aus Satz 4.4.9 das Inverse A^{-1} .
- (b) Jetzt, wo Sie A^{-1} schon berechnet haben, lassen sich ganz leicht (d.,h. insbesondere ohne Gauß-Algorithmus) alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wie?

- (c) Bestimmen Sie die Determinante $\det A$ unter Verwendung der gleichen Zeilentransformationen, die Sie in (a) verwendet haben.
- (d) Wenn man die Zeilentransformationen aus (a) auf geeignete Art „rückwärts“ anwendet, bringt man A^{-1} wieder in Normalform. Was sagt das über die Beziehung zwischen $\det A$ und $\det(A^{-1})$ aus? (Diese Beziehung wurde in der Vorlesung bereits gezeigt. Hier sollen Sie ein neues Argument dafür angeben, dass sie gilt.)

Aufgabe 3 (1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Wir wollen überprüfen, dass Matrixmultiplikation bilinear ist. Also genauer: Sei K ein Körper und seien $\ell, m, n \geq 1$. Die Behauptung ist, dass die Abbildung

$$K^{\ell \times m} \times K^{m \times n} \rightarrow K^{\ell \times n}$$

bilinear ist.

- (a) Was genau ist (laut der Definition von Bilinearität) dafür zu zeigen?
- (b) Finden Sie eine Aussage im Vorlesungsskript (in Abschnitt 4.1), die (fast) genau das besagt.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

- (a) Sei $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine multilineare Abbildung mit $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.

Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Hinweis: Die richtige Antwort ist *nicht* 2. Um die richtige Antwort zu finden, können Sie als Zwischenschritte z. B. zunächst $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ und dann $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ bestimmen.

- (b) Ist K ein Körper, $r \in K$ und $A \in K^{3 \times 3}$ eine Matrix, so ist $\det(rA)$ (meistens) *nicht* gleich $r \cdot \det A$. Es gibt jedoch eine andere Formel, mit der sich $\det(rA)$ aus r und A berechnen lässt. Finden Sie eine solche Formel. (Ihre Berechnungen aus (a) sollten Sie auf die richtige Fährte bringen.)

Aufgabe 5 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Für welche Paare von Zahlen $0 \leq r, d \leq 2$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $\text{rk}(A) = r$ und $\det(A) = d$? Geben Sie jeweils ein Beispiel einer solchen Matrizen an (wenn sie existiert).