Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
WiSe 2024/25

Lineare Algebra 1 – Blatt 13

Abgabe bis 27.1.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper, seien V und W K-Vektorräume und seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und $g \in \operatorname{End}(W)$. (Zur Erinnerung: Nach Aufgabe 1 von Blatt 7 ist auch $V \times W$ ein K-Vektorraum.) Sei $h \in \operatorname{End}(V \times W)$ definiert durch $h(v, w) := (f(v), g(w))$.

Zeigen Sie, dasss für $\lambda \in K$ gilt: λ ist genau dann ein Eigenwert von h, wenn λ ein Eigenwert von f oder von g ist.

Aufgabe 2 (2+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

In dieser Aufgabe wollen wir mit der Leibniz-Formel die Determinante von Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

bestimmen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Die Summanden der Leibniz-Formel haben die Form $\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} \cdot a_{4,\sigma(4)}$ für Bijektionen $\sigma\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$. Listen Sie all diejenigen Bijektionen σ auf, bei denen (für unser obiges A) keiner der Faktoren $a_{i,\sigma(i)}$ gleich 0 ist.
Anmerkung: Sie sollten sechs solche Bijektionen finden.

(b) Bestimmen Sie jetzt das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma)$ dieser sechs Bijektionen und schreiben Sie dann die vollständige Formel für die Determinante von A hin.

Aufgabe 3 (1+1+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

In der Vorlesung wurde behauptet, das Signum einer Bijektion $\sigma \in \operatorname{Sym}(\{1, \dots, n\})$ sei definiert als $\operatorname{sgn}(\sigma) = \det A_\sigma$, für $A_\sigma = \big(\big(e_{\sigma(1)}\big| \cdots \big|e_{\sigma(n)}\big)\big)$. Im Vorlesungskript steht jetzt etwas anderes, nämlich $\operatorname{sgn}(\sigma) = \det B_\sigma$, wobei B_σ die Matrix ist, die an den Stellen $i, \sigma(i)$ eine 1 stehen hat (für $i = 1, \dots, n$) und sonst nur 0en.

(a) Geben Sie im Fall $n = 4$ und $\sigma\colon 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1$ die Matrizen A_σ und B_σ an. (Sie sollten feststellen, dass diese beiden Matrizen verschieden sind.)

(b) Wie kann man (im Allgemeinen) A_σ aus B_σ erhalten (oder umgekehrt)? Wieso haben Sie die gleiche Determinante?

(c) In der Vorlesung wurde nicht so recht begründet, warum diese Vorzeichen in der Leibniz-Formel die richtigen sind. Überprüfen Sie dies, indem Sie die Leibniz-Formel auf die Matrix B_σ anwenden.
(Sie sollten also rausfinden: *Wenn* man Determinanten mit einer Formel der Form $\sum_{\sigma \in \operatorname{Sym}(\{1,\dots,n\})} s(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ berechnen kann, *dann* muss $s(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ sein.)

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Geben Sie eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ an, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

(c) Bestimmen Sie $A^{2025} v_i$, wobei v_i Ihre Vektoren aus (b) sind. Benutzen Sie dies, um die Matrix A^{2025} zu bestimmen. (Hierbei ist $A^{2025} = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{2025 \text{ mal}}$.)

Aufgabe 5 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 8 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Wie hängt (in diesem Fall) die Menge der Eigenvektoren von A mit $\ker A$ zusammen?

(c) Existiert eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A?

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/