

Aufgabe 1 (keine Punkte):

- (a) Wir nehmen an, dass $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix ist, die Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten 3 bzw. 5 bzw. 8 hat. Geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie auch diese Diagonalmatrix an. (Sie brauchen *nicht* die Matrix A zu bestimmen.)
- (b) Wir nehmen nun an, dass $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine weitere Matrix ist, die die obigen Vektoren v_1, v_2, v_3 als Eigenvektoren hat (aber vielleicht zu anderen Eigenwerten). Zeigen Sie, dass A und B kommutieren, d. h. dass $AB = BA$ gilt.

Aufgabe 2 (keine Punkte):

- (a) Wir definieren $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle := 4a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 9a_2b_2$, für $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass dies ein Skalarprodukt ist.
Hinweis: Eine einfache allgemeine Methode, um Positiv-Definitheit zu zeigen, kam in der Vorlesung noch nicht dran. In diesem speziellen Fall hilft der folgende Trick: Man möchte $\langle v, v \rangle$ als Summe von Quadraten schreiben. Dies ist möglich, indem man $x^2 + 2xy + y^2$ durch $(x + y)^2$ ersetzt.
(Im Rest der Aufgabe arbeiten wir mit diesem Skalarprodukt.)
- (b) Geben Sie einen Vektor v_1 der Form $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und einen Vektor v_2 der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$ an, so dass $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ ist.
- (c) Stehen v_1 und v_2 senkrecht zueinander (d. h. ist $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$)? Wenn nein, finden Sie einen Vektor $v_3 \neq 0$, der senkrecht zu v_1 steht.