

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei \underline{L} ein lineares Gleichungssystem in x_1, \dots, x_n , das mindestens eine Lösung besitzt. Zeigen Sie, dass für jedes $i \leq n$ gilt:

Entweder es gibt genau eine reelle Zahl c_i , die sich zu einer Lösung (c_1, \dots, c_n) von \underline{L} ergänzen lässt;
oder jede reelle Zahl c_i lässt sich zu einer Lösung (c_1, \dots, c_n) von \underline{L} ergänzen.

(Mit „ c_i lässt sich zu einer Lösung (c_1, \dots, c_n) ergänzen“ ist gemeint: Es gibt eine Lösung von \underline{L} , bei den x_i den vorgegebenen Wert c_i hat.)

Aufgabe 2 (1+1+1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Seien A, B und C (mathematische) Aussagen. Welche der folgenden Aussagenpaare sind äquivalent?

- (a) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
 $A \vee (B \wedge C)$
- (b) $\neg A \vee B$
 $A \Rightarrow B$
- (c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
 $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$
- (d) $A \Rightarrow B$
 $\neg(B \Rightarrow A)$
- (e) $A \Rightarrow B$
 $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
- (f) $B \wedge (A \Rightarrow \neg B)$
 $(\neg A) \wedge B$

Überlegen Sie sich am besten zunächst, was Sie intuitiv darüber denken. Danach können Sie folgendermaßen prüfen, ob Ihre Intuition richtig war:

Jede der Aussagen A, B und C kann wahr oder falsch sein. Listen Sie alle Kombinationen auf und bestimmen Sie, bei welchen Kombinationen die Aussagen aus (a)–(f) wahr bzw. falsch sind.

Aufgabe 3 (5+1+1+1+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Alina mag manche Zahlen gar nicht, manche ein bisschen und manche sehr.

- (a) Schreiben Sie die folgenden Aussagen als Text aus. Ersetzen Sie nicht einfach nur die Symbole durch Wörter, sondern suchen Sie nach gut verständlichen Formulierungen.
 - (i) $\exists x \in \mathbb{N}$: Alina mag x sehr
 - (ii) $\forall x \in \mathbb{N}$: $\exists y \in \mathbb{R}$: Alina mag x und y nicht gleich gern
 - (iii) $\exists y \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{N}$: Alina mag x und y nicht gleich gern
 - (iv) $(\forall x \in \mathbb{N}$: Alina mag x gar nicht) \vee ($\forall x \in \mathbb{N}$: Alina mag x ein bisschen)
 - (v) $\forall x \in \mathbb{N}$: (Alina mag x gar nicht \vee Alina mag x ein bisschen)
- (b) Zeigen Sie (indem Sie ein Beispiel angeben), dass die Aussagen (ii) und (iii) nicht äquivalent sind.
- (c) Zeigen Sie (indem Sie ein Beispiel angeben), dass die Aussagen (iv) und (v) nicht äquivalent sind.
- (d) Eine der obigen Aussagen ist genau die Negation einer anderen Aussage. Welche?
- (e) Formulieren Sie die Negation der Aussage (ii) auf verständliche Art als Text.
(Wenn Sie einfach „Es ist nicht wahr, dass...“ davor schreiben, ist das nicht sonderlich verständlich; nehmen Sie sich lieber ein Beispiel an (d).)