Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
WiSe 2024/25

Lineare Algebra 1 – Blatt 3

Abgabe bis 4.11.2024, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Zeigen Sie:

(a) Für beliebige Mengen A, B und C gilt: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(b) Sind A und B endliche Mengen, so gilt: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Aufgabe 2 (1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche sind falsch? (Begründen Sie Ihre Antworten kurz.)

(a) Ist M eine Menge und sind $A, B \in \mathcal{P}(M)$, so ist auch $A \cup B \in \mathcal{P}(M)$.

(b) $\mathcal{P}(\{1,2,3\} \setminus \{1,2\})$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \setminus \mathcal{P}(\{1,2\})$.

(c) Die Menge $\{\{\emptyset\}\}$ ist ein Element von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

(d) Die Kardinalität von $\{\{1,2,3\}\} \cup \{\{2,3,1\}\}$ ist zwei.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Manchmal liest man Definitionen, die einem auf den ersten Blick völlig unverständlich erscheinen, z. B. die folgende Definition einer Funktion f:

$$f\colon \operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), g \mapsto g^{-1}(0).$$

In solchen Fällen ist es nützlich, sich selbst ein paar einfache Fragen über die Definition zu stellen. Hier sind ein paar Beispiele solcher Fragen; beantworten Sie diese.

(a) Aus welcher Menge stammt das g in dieser Definition?

(b) Was ist $g^{-1}(0)$ für ein mathematisches Objekt?

(c) Was ist $f(\mathrm{id}_{\mathbb{N}})$?

(d) Was ist $f(g)$, für $g\colon n \mapsto 1$? (Hier soll g offenbar eine Funktion darstellen. Den Definitionsbereich und den Wertebereich von g soll man erraten. Was ist da wohl gemeint?)

(e) Gibt es zwei verschiedene g_1 und g_2 im Definitionsbereich von f, so dass $f(g_1) = f(g_2)$?

(f) Für welche g ist $f(g) = \mathbb{N}$?

(g) Gibt es ein Element M vom Wertebereich von f, so dass gar kein g im Definitionsbereich von f existiert mit $f(g) = M$?

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Im Folgenden wurden fünf Versuche gemacht, eine Abbildung f_i zu definieren. Welche dieser Versuche sind geglückt? (Also: Welche der Versuche beschreiben wirklich eindeutig eine Abbildung?) Und bei den geglückten Versuchen: Welche sind injektiv, welche sind surjektiv?

(a) $f_1\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$

(b) $f_2\colon \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\} \to \mathbb{N}, \diamondsuit \mapsto 9, \heartsuit \mapsto 10, \spadesuit \mapsto 11, \clubsuit \mapsto 12$

(c) $f_3 \in \operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ mit $f_3(n) = \frac{n}{2}$ falls n gerade ist und $f_3(n) = 0$ falls n ungerade ist.

(d) $f_4 \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist die Funktion mit dem folgenden Graph: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x\}$.

(e) $f_5\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), x \mapsto \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$