Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
WiSe 2024/25

Lineare Algebra 1 – Blatt 4

Abgabe bis 11.11.2024, 10:30 Uhr im Ilias

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Zeigen Sie Satz 1.4.6 aus der Vorlesung, d. h.: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, so ist $M/\sim$ eine Partition von M.

(Schauen Sie zunächst in die Definition von Partition, um zu sehen, was zu zeigen ist. Achten Sie dann bei ihrem Beweis darauf, wirklich nur die Eigenschaften von $\sim$ zu verwenden, die in der Definition von Äquivalenzrelation stehen.)

Aufgabe 2 (1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{im}(g \circ f) = g(\operatorname{im} f)$

(b) Sind sowohl f als auch g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen auf der Menge M? Bei denen, die es nicht sind: Geben Sie an, welche Bedingungen verletzt sind. Bei denen, die es sind: Beschreiben Sie die zugehörige Partition $M/\sim$.

(a) $M = \mathbb{Z}$, $a \sim b \iff a = b \lor a = b + 1 \lor a = b - 1$

(b) $M = \mathbb{R}$, $a \sim b \iff a \leq b$

(c) $M = \mathbb{Q}^2$, $(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = a' + b$

Aufgabe 4 (2+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Betrachten Sie die Menge $G := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit der Verknüpfung $A \circ B := A \cap B$.

(a) Geben Sie ein „neutrales Element“ $E \in G$ an, so dass die Bedingungen (i) und (ii) aus der Definition 2.1.1 einer Gruppe erfüllt sind.

(b) Zeigen Sie, dass (iii) nicht erfüllt ist, d. h. geben Sie ein $A \in G$ an, das kein Inverses besitzt.

Aufgabe 5 (3 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b := a + b - 2$$

und dem neutralen Element 2 eine Gruppe bildet.

Aufgabe 6 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Zeigen Sie, dass das neutrale Element e einer Gruppe $(G, \circ, e)$ bereits eindeutig durch G und $\circ$ festgelegt ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass in G ein weitere Element e' existiert, das die Bedingung (ii) aus der Definition 2.1.1 einer Gruppe erfüllt. Zeigen Sie, dass dann bereits $e' = e$ gilt.

Aufgabe 7 (3 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Seien G und H Gruppen. Wir definieren auf $G \times H$ die Verknüpfung

$$(a, b) \circ (a', b') := (a \circ a', b \circ b')$$

für $a, a' \in G$, $b, b' \in H$. Zeigen Sie, dass $G \times H$ auf diese Art zu einer Gruppe wird. (Was ist das neutrale Element von $G \times H$? Und was ist das Inverse eines Elements (a, b)?)