Lineare Algebra 1 – Blatt 5

Abgabe bis 18.11.2024, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Zeigen Sie Lemma 2.2.4 aus der Vorlesung, d. h.: Eine Teilmenge H einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn H nicht leer ist, und wenn für alle $a, b \in H$ gilt: $a \circ b^{-1} \in H$.

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Untergruppen? (Die Verknüpfung auf $\mathbb{R}^2$ ist die aus Beispiel 2.2.1.)

(a) $\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(b) $\{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(c) $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Wir nennen (in dieser Aufgabe) ein Element a eines Rings R ein „zwei-Element“, wenn für alle $b \in R$ gilt: $a \cdot b = b + b$. Zeigen Sie: In jedem Ring existiert ein zwei-Element.

Aufgabe 4 (3 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Wir nennen ein Element a eines Rings R „invertierbar“, wenn ein $b \in R$ existiert, so dass $a \cdot b = b \cdot a = 1$ ist. Wir schreiben $R^\times$ für die Menge aller invertierbaren Elemente von R. Zeigen Sie, dass $(R^\times, \cdot, 1)$ eine Gruppe ist.

(Machen Sie zunächst eine Liste von allem, was dafür zu zeigen ist.)

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

In dieser Aufgabe wollen wir uns die Quotientengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ genauer anschauen.

(a) Welche Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ werden benötigt, damit es überhaupt Sinn ergibt, von der Quotientengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu sprechen?
Hierbei spielt eine Verknüpfung eine Rolle. Welche Verknüpfung muss hier gemeint sein, damit $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ Sinn ergibt?

(b) Ist $r \in \mathbb{Q}$, so schreiben wir $\bar{r} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ für das Bild von r unter der kanonischen Abbildung (siehe Defininition 1.4.7; vgl. Definition 2.2.5. Welche der folgenden Zahlen sind Represäntanten von $\overline{(\frac{2}{3})}$?
(i) $-\frac{1}{3}$ (ii) 0 (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) 1

(c) Bestimmen Sie $\overline{(\frac{2}{3})} + \overline{(\frac{5}{6})}$, indem Sie jeweils einen Represäntanten wählen und die Summe bilden.

(d) Bestimmen Sie $\overline{(\frac{2}{3})} + \overline{(\frac{5}{6})}$ nochmal, mit einem anderen Represäntanten von $\overline{(\frac{2}{3})}$ (aber dem gleichen Repräsentanten von $\overline{(\frac{5}{6})}$). Ist das Ergebnis das selbe Element von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$?

(e) Wir setzen $M := \{r \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq r < 1\}$. Zeigen Sie: Jedes Element $\bar{a} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat genau einen Represäntanten in M.

(f) Wir definieren eine Verknüpfung $\oplus$ auf M durch: $a \oplus b$ ist der (eindeutige) Repräsentant von $\bar{a} + \bar{b}$, der in M liegt. Beschreiben Sie, wie man $a \oplus b$ aus a und b berechnen kann.

(g) Begründen Sie, dass $(M, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist, *ohne* jedes Gruppenaxiom einzeln zu überprüfen. Verwenden Sie statt dessen, dass wir bereits wissen, dass $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(h) M ist eine Gruppe, die eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist. Warum ist M trotzdem keine Untergruppe von $\mathbb{Q}$?