Lineare Algebra 1 – Blatt 6

Abgabe bis 25.11.2024, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Korollar 2.3.13 aus der Vorlesung besagt: Ist K ein Körper und $f \in K[x] \setminus \{0\}$, so lässt sich f schreiben in der Form

$$f = \left(\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)\right) \cdot g,$$

für $a_1, \dots, a_n \in K$ und wobei $g \in K[x]$ ein Polynom ohne Nullstellen (in K) ist. Außerdem hat f maximal $\deg f$ verschiedene Nullstellen.

Der Beweis dieses Korollars in der Vorlesung war etwas informell. Geben Sie einen formelleren Beweis per Induktion über $\deg f$ an.

Aufgabe 2 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Wir arbeiten im Körper $\mathbb{F}_5$. Geben Sie alle Lösungen der linearen Gleichung $3x + 2y = 4$ an. (Wie viele Lösungen gibt es?)

(Mit $2, 3, 4$ sind also Elemente von $\mathbb{F}_5$ gemeint, $+$ und $\cdot$ sind die entsprechenden Verknüpfungen in $\mathbb{F}_5$, und Ihre Lösungen sollten Paare in $\mathbb{F}_5^2$ sein.)

Aufgabe 3 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Zeigen Sie: Ist p eine Primzahl und ist $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_p$, das mindestens eine Lösung besitzt, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\underline{L}$ genau p^m viele Lösungen besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 1.1.15

Aufgabe 4 (1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

(a) Lässt sich das Polynom $x^2+3 \in \mathbb{R}[x]$ als Produkt zweier Polynome $f, g \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(f) = 1 = \deg(g)$ schreiben?

(b) Lässt sich das Polynom $x^2+3 \in \mathbb{C}[x]$ als Produkt zweier Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(f) = 1 = \deg(g)$ schreiben?

Aufgabe 5 (2+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

(a) Geben Sie ein Polynom $f \in \mathbb{F}_5[x]$ vom Grad 2 an, das keine Nullstelle besitzt.

(b) Geben Sie ein Polynom $f \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$ vom Grad 2 an, das mindestens 3 Nullstellen besitzt.

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ in n Variablen, das mindestens eine Lösung besitzt. Wir fragen uns: Wenn alle Koeffizienten[1] von $\underline{L}$ in der Menge

$$K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

liegen, gibt es dann auch eine Lösung von $\underline{L}$, die in K^n liegt?

Dies ist erstmal gar nicht klar (und für andere Mengen K sicher falsch). Aber:

(a) Zeigen Sie, dass K ein Ring ist.
(Was ist dafür zu prüfen? Welche der zu prüfenden Dinge sind offensichtlich und bei welchen muss man wirklich was nachrechnen?)

(b) Zeigen Sie, dass K sogar ein Körper ist.
Hinweis: Dafür ist es nützlich zu prüfen, dass $(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ gilt.

(c) Beantworten Sie nun die Ursprungsfrage (indem sie $\underline{L}$ als lineares Gleichungssystem über K auffassen).

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/

[1] gemeint sind die Einträge der Koeffizientenmatrix