

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper, und seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass dann auch $V \times W$ ein K -Vektorraum ist, mit den folgenden Verknüpfungen:

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w') \quad \text{und} \quad r \cdot (v, w) := (r \cdot v, r \cdot w)$$

für $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $r \in K$.

(Diesen Vektorraum $V \times W$ nennt man die *direkte Summe* von V und W , und man schreibt auch $V \oplus W$ dafür.)

Aufgabe 2 (1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind $\mathbb{R}$ -Untervektorräume? Begründen Sie.

- (a) $\mathbb{Q}^2$
- (b) $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\mathbb{R}^2$
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und seien $A, B \subseteq V$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

- (a) Ist A eine Teilmenge von B , so ist $\langle A \rangle_K$ eine Teilmenge von $\langle B \rangle_K$.
- (b) Ist A eine echte Teilmenge von B , so ist $\langle A \rangle_K$ eine echte Teilmenge von $\langle B \rangle_K$.
- (c) A ist immer eine echte Teilmenge von $\langle A \rangle_K$.
- (d) A ist ein Untervektorraum von V genau dann, wenn $A = \langle A \rangle_K$ gilt.

Anmerkung: Bei den konkreten Gegenbeispielen können Sie immer $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$ wählen.

Aufgabe 4 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

In der Vorlesung wurde im Beweis von Satz 3.1.6 ein Teil ausgelassen, nämlich dass für beliebige $r \in K$ gilt: $r \cdot 0 = 0$. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 5 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$.

- (a) Sei $U := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ das Erzeugnis dieser Vektoren. Geben Sie U explizit an.
- (b) Geben Sie eine lineare Abhängigkeit zwischen v_1, v_2, v_3 an.
- (c) Kann man auch einen der Vektoren weglassen und immer noch U als Erzeugnis erhalten? Wenn ja welche? Was sagt Lemma 3.3.2 dazu (wobei Sie das Lemma natürlich auch bei anderer Nummerierung der Vektoren anwenden können)?

Aufgabe 6 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei p eine Primzahl, sei V ein beliebiger $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum.

- (a) Zeigen Sie (unter Verwendung von Abschnitt 3.1 der Vorlesung): Ist $v \in V \setminus \{0\}$ und sind $r, r' \in \mathbb{F}_p$ mit $r \neq r'$, so gilt auch $rv \neq r'v$.
- (b) Zeigen Sie: Für beliebige Vektoren $v \in V$ hat $U := \langle v \rangle_{\mathbb{F}_p}$ entweder genau ein oder genau p Elemente.
Hinweis: Teil (a) ist nützlich.
- (c) Geben Sie eine Vermutung an, wie viele Elemente $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{F}_p}$ haben kann für $v_1, \dots, v_n \in V$. Können Sie vage beschreiben, wie Sie zu dieser Vermutung kommen? (Haben Sie Argumente, die für Ihre Vermutung sprechen? Haben Sie's an Beispielen ausprobiert? Vielleicht erstmal für $n = 2$?)
(Sie brauchen Ihre Vermutung nicht zu beweisen. Das aufzuschreiben könnte eventuell lang und friemelig werden. Wir werden bald Sätze in der Vorlesung sehen, mit denen dies leichter wird.)