Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
WiSe 2024/25

Lineare Algebra 1 – Blatt 8

Abgabe bis 9.12.2024, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Der Steinitzsche Austauschsatz besagt: Sei $B \subseteq V$ eine Basis von V mit n Elementen und seien $w_1, \dots, w_k \in V$ linear unabhängig. „Dann kann man einige der Vektoren aus der Basis B durch die w_i austauschen." Genauer: Dann existiert eine Teilmenge $B' \subseteq B$ mit $\#B' = n - k$, so dass $B' \cup \{w_1, \dots, w_k\}$ auch eine Basis von V ist. Diesen Satz wollen wir zeigen.

(a) Zeigen Sie zunächst folgendes: Ist $(w_1, \dots, w_k)$ linear unabhängig aber keine Basis von V, und ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so existiert ein i, so dass $(w_1, \dots, w_k, v_i)$ immer noch linear unabhängig ist.
Hinweis: Satz 3.3.3 ist nützlich. Kann es sein, dass alle v_i in $\langle w_1, \dots, w_k \rangle_K$ liegen?

(b) Zeigen Sie jetzt den Steinitzschen Austauschsatz.
Hinweis: Kümmern Sie sich zunächst nicht um die Kardinalität von B'. Die kann man dann hinterher mit einem Satz aus der Vorlesung berechnen.

Aufgabe 2 (1+1+1+1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Welche der folgenden Tupel von Vektoren sind linear unabhängig, was ist die Dimension des Erzeugnisses der jeweiligen Vektoren, und welche sind eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 31 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Versuchen Sie nach Möglichkeit, möglichst wenig zu rechnen, um diese Fragen zu beantworten. (Zum Beispiel: Kann man manche der Fragen allein aufgrund der Anzahl der angegebenen Vektoren beantworten?)

Aufgabe 3 (1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

(a) Prüfen Sie, dass die folgenden Vektoren eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ bilden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) Stellen Sie den Vektor $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren aus (a) dar.

Aufgabe 4 (3 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent zueinander sind:

(i) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig.

(ii) $v_1, \dots, v_n$ erzeugen V.

(iii) $v_1, \dots, v_n$ bilden eine Basis von V.

Hinweis: Satz 3.4.7 ist auf jeden Fall nützlich, und Satz 3.4.3 kann auch hilfreich sein (je nach Lösungsweg).

Aufgabe 5 (1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

(a) Gibt es in $\mathbb{C}^3$ Untervektorräume U_1, U_2, U_3 mit $\{0\} \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq \mathbb{C}^3$?

(b) Gibt es in $\mathbb{C}^3$ Untervektorräume U_1, U_2 mit $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Hinweis: Beide Teilaufgaben lassen sich mit einem geeigneten Satz aus Abschnitt 3.4 leicht beantworten.

Aufgabe 6 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Jetzt können wir das Problem aus Aufgabe 6 vom vorigen Blatt fertig lösen. Sei also wieder p eine Primzahl und V ein beliebiger $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie: Ist $\dim V = d$, so hat V genau p^d viele Elemente.
Hinweis: Sie können z. B. eine Bijektion zwischen V und $\mathbb{F}_p^n$ angeben.

(b) Zeigen Sie auch: Ist V unendlich-dimensional, so hat V unendlich viele Elemente.

(c) Beantworten Sie damit jetzt die Frage vom vorigen Blatt: Wenn n gegeben ist, was kann die Kardinalität $N := \#\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{F}_p}$ sein, wenn $v_1, \dots, v_n$ Vektoren aus einem beliebigen $\mathbb{F}_p$-Vektorraum V sind?
Begründen Sie, dass keine anderen N auftreten können als die von Ihnen angegebenen, und geben Sie Beispiele an, die belegen, dass die von Ihnen angegebenen N wirklich auftreten können.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/