

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (3+1 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper und $A = (v_1 \mid \dots \mid v_n) \in K^{m \times n}$ eine Matrix mit Spalten $v_1, \dots, v_n \in K^m$. Zeigen Sie:

- (a) Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die durch A definierte Abbildung injektiv ist.
Hinweis: Können Sie aus einer linearen Abhängigkeit einen Vektor $w \in K^n \setminus \{0\}$ finden, der auf 0 abgebildet wird? Und: Wenn $Aw_1 = Aw_2$ ist, betrachten Sie $A(w_1 - w_2)$.
- (b) Folgern Sie Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ bilden eine Basis von K^m genau dann, wenn die durch A definierte Abbildung bijektiv ist.
Hinweis: Bemerkung 4.1.5 ist nützlich.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

- (a) Geben Sie an, welche der 9 Matrix-Produkte $AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC$ (laut Vorlesung) definiert sind. (Alle Matrizen sind über $\mathbb{R}$.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie diejenige Matrixprodukte aus (a), die definiert sind.
- (c) Von wo nach wo definiert die Matrix A eine Abbildung? Geben Sie alle Vektoren an, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden.

Aufgabe 3 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Geben Sie zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, so dass keiner der Einträge a_{ij}, b_{ij} gleich 0 ist, aber so dass das Matrixprodukt AB die Nullmatrix ist.

Aufgabe 4 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- (a) $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a \cdot b$
- (b) $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \end{pmatrix}$
- (c) $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, seien V und W K -Vektorräume und sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$.
- (b) Wenn f mindestens zwei verschiedene Vektoren aus V auf 0 abbildet, bildet f bereits alles auf 0 ab.
- (c) Wenn $v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängig sind, dann sind auch $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear abhängig.

Aufgabe 6 (1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Wir betrachten die Basis $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$ und die Vektoren $w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Laut Satz 4.2.5 gibt es genau eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Laut Korollar 4.2.6 lässt sich f als Matrix schreiben. Geben Sie diese Matrix an.
- (b) Geben Sie jetzt eine andere Basis v'_1, v'_2 von $\mathbb{R}^2$ an und andere Vektoren $w'_1, w'_2 \in \mathbb{R}^3$, so dass $f(v'_1) = w'_1$ und $f(v'_2) = w'_2$ gilt (für die Abbildung f aus (a)). Warum ist das kein Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage aus Satz 4.2.5?