Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2024/25
05.02.2025

Aufgaben der Hauptklausur Lineare Algebra 1

Aufgabe 1 (1+1+1+3+2 Punkte):

Sei $A = \{1, \dots, 8\}$ und $B = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. (Zur Erinnerung: $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A.) Sei außerdem $f\colon B \to A$ definiert durch $f(M) = \min M$. (Hierbei bezeichnet $\min M$ das Minimum der Menge M, also z. B. $\min\{2, 4, 5\} = 2$.)

(a) Geben Sie das Urbild $f^{-1}(7) \subseteq B$ an.

(b) Ist f injektiv?

(c) Ist f surjektiv?

(d) Gibt es ein $a \in A$ mit $\#(f^{-1}(a)) = 3$?
Hinweis: Bestimmen Sie $\#(f^{-1}(a))$ für $a = 8$, $a = 7$ und $a = 6$.

(e) Geben Sie zwei verschiedene Abbildungen $g_1, g_2\colon A \to B$ an, so dass $f \circ g_1 = f \circ g_2 = \mathrm{id}_A$ gilt.

Aufgabe 2 (2+3+3 Punkte):

(a) Für welche Elemente $\bar{a} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ existiert ein multiplikatives Inverses, d. h. ein Element $\bar{b} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} = 1$?

(b) Sei nur R ein beliebiger kommutativer Ring. Wir nennen ein Element $a \in R$ *invertierbar*, wenn ein Element $b \in R$ existiert mit $ab = 1$.
Zeigen Sie: Die Menge aller invertierbaren Elemente von R ist eine Gruppe, mit $\cdot$ als Verknüpfung.

(c) Sei nun K ein Körper.
Zeigen Sie: Die invertierbaren Elemente vom Polynomring $K[x]$ sind genau die Elemente von $K^\times$ (also die konstanten Polynome, die ungleich 0 sind).
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Formel für den Grad des Produkts von zwei Polynomen.

Aufgabe 3 (3+2+3 Punkte):

Wir fassen den Polynomring $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf.

(a) Zeigen Sie, dass eine der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}[x]$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$ ist und die andere nicht. (Finden Sie selbst heraus, welche ein Untervektorraum ist.)
  (i) $U_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \geq 3\}$
  (ii) $U_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(3) = 0\}$

(b) Sei $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq 3\}$. Geben Sie eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}[x]$ mit $\operatorname{im} g = U$ an und bestimmen Sie $\dim U$.

(c) Sei $M = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(2) = 1\}$. Zeigen Sie, dass M bereits ganz $\mathbb{R}[x]$ erzeugt.
Hinweis: Sie können z. B. zeigen, dass sich jedes Polynom g entweder als Vielfaches eines Polynoms aus M oder als Differenz von zwei Polynomen aus M schreiben lässt (je nachdem, ob $g(2) = 0$ ist).

Aufgabe 4 (2+1+1+2+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum ist:
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Geben Sie eine Basis von U an.

(c) Sei $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, u \rangle = 0\}$ gilt. (Wir arbeiten mit dem Standard-Skalarprodukt.)

(d) Von nun an sei $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum mit $\dim U' = n - 1$.
Zeigen Sie: Ist $u_1, \dots, u_{n-1}$ eine Basis von U' ist und $v \in \mathbb{R}^n \setminus U'$, so existiert eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(u_i) = 0$ für alle $i \leq n - 1$ und $f(v) \neq 0$.

(e) Sei $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ die Matrix zur Abbildung f aus (d) und sei $w' := A^T$ die transponierte Matrix, aufgefasst als Vektor in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $U' = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle w', u\rangle = 0\}$. (Wir arbeiten weiterhin mit dem Standard-Skalarprodukt.)

Aufgabe 5 (2+3+2+1):

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie zu jedem Eigenwert jeweils einen Eigenvektor an.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ an, so dass $A' := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch A' an. (S^{-1} braucht nicht angegeben zu werden.)

(d) Bestimmen Sie den Rang von A' und leiten Sie daraus ab, was der Rang von A ist.