

Linear Algebra I
Klausur
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

- a) Sei $M \in B$ mit $f(M) = 7$. Dann ist $\min(M) = 7$, d.h. M muss 7 enthalten und wenn $x \in M$ liegt, ist $x \geq 7$. Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten für M , entweder sie enthält 8 oder nicht, d.h. $f^{-1}(7) = \{\{7\}, \{7, 8\}\}$.
- b) Nein, weil z.B. $\#f^{-1}(7) = 2 > 1$.
- c) Ja: sei $a \in A$. Dann ist $f(\{a\}) = a$.
- d) Nein, es gibt keine solche a : Wir haben $f^{-1}(8) = \{\{8\}\}$, $f^{-1}(7) = \{\{7\}, \{7, 8\}\}$, und $f^{-1}(6) = \{\{6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{6, 7, 8\}\}$. Daraus folgt $\#f^{-1}(8) = 1$, $\#f^{-1}(7) = 2$ und $\#f^{-1}(6) = 4$.
- Sei nun $a \in A$, $a \leq 6$. Dann liegen $\{a\}$, $\{a, 7\}$, $\{a, 8\}$ und $\{a, 7, 8\}$ in $f^{-1}(a)$, also $\#f^{-1}(a) \geq 4$.
- e) Sei $g_1: A \rightarrow B$ definiert durch $g_1(a) = \{a\}$, und $g_2: A \rightarrow B$ definiert durch $g_2(a) = \{a\} \cup \{8\}$. Offensichtlich gilt $\min(\{a\}) = a$ für alle $a \in A$. Für $a \in A$ gilt auch $a \leq 8$, d.h., $\min(\{a\} \cup \{8\}) = a$. Daraus folgt, dass $f \circ g_1 = f \circ g_2 = \text{id}_A$.

Aufgabe 2.

- a) Wir haben $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ und $\bar{5} \cdot \bar{5} = (\overline{-1}) \cdot (\overline{-1}) = \bar{1}$, d.h. $\bar{1}$ und $\bar{5}$ sind invertierbar in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. $\bar{0}$ ist offensichtlich nicht invertierbar. $\bar{2}$ ist nicht invertierbar, da $2n$ gerade ist für alle $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, aber jeder Repräsentant von $\bar{1}$ ungerade ist. Aus dem gleichen Grund ist $\bar{4}$ nicht invertierbar. $\bar{3}$ ist nicht invertierbar, da $3n$ immer durch 3 teilbar ist aber kein Repräsentant von $\bar{1}$ durch 3 teilbar ist.
- b)
- Assoziativität folgt aus der Definition eines Rings.
 - Seien $a, b \in R$ invertierbar. Dann existiert $c, d \in R$ mit $ac = 1$ und $bd = 1$. Dann ist dc ein Inverses von ab , da $(ab)(dc) = (a(bd))c = (a1)c = ac = 1$ gilt. D.h., ab ist invertierbar, und die Menge aller invertierbaren Elemente von R ist abgeschlossen unter „ $\cdot$ “.
 - Per Definition eines Ringes existiert $1 \in R$ neutral für „ $\cdot$ “. 1 ist invertierbar da $1 \cdot 1 = 1$.
 - Sei $a \in R$ invertierbar. Per Definition existiert $b \in R$ mit $ab = 1$, d.h. b ist ein Inverses von a bezüglich „ $\cdot$ “. Es bleibt noch zu zeigen, dass dieses Inverse b selbst auch invertierbar ist. Dies ist in der Tat der Fall, da $ba = ab = 1$ gilt.
- c) Sei $a \in K^\times$. Dann existiert $b \in K$ mit $ab = 1$. Aber a und b können als Polynom aufgefasst werden, d.h. a ist invertierbar in $K[x]$.
- Sei nun $f \in K[x]$ invertierbar. Dann existiert $g \in K[x]$ mit $fg = 1$. Weil K ein Körper ist, gilt $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$; aber $\deg(fg) = \deg(1) = 0$. Daraus folgt $\deg(f) = \deg(g) = 0$; und f und g liegen in K . Dann ist $f \in K$ invertierbar in K , d.h. $f \in K^\times$.

Aufgabe 3.

a) U_1 ist kein Untervektorraum da $\deg(0) = -\infty < 3$, d.h. $0 \notin U_1$.

U_2 ist ein Untervektorraum: seien $f, g \in U_2$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $P := rf + g \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom. Es gilt $P(3) = rf(3) + g(3) = 0r + 0 = 0$, also $P \in U_2$. Dies zeigt: U_2 ist ein Untervektorraum.

b) Sei $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}[x]$ definiert durch $g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3$. g ist linear: Seien

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ und } r \in \mathbb{R}, \text{ dann } g\left(r \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} ra + a' \\ rb + b' \\ rc + c' \\ rd + d' \end{pmatrix}\right) = ra + a' + (rb + b')x + (rc + c')x^2 + (rd + d')x^3 = r(a + bx + cx^2 + dx^3) + (a' + b'x + c'x^2 + d'x^3) = rg\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}\right).$$

Es gilt auch $\text{im } g = U$: Wenn $f \in U$ liegt, ist $\deg(f) \leq 3$, und f kann als $a + bx + cx^2 + dx^3$ geschrieben werden, d.h. $f \in \text{im } g$. Wenn nun $f \in \text{im } g$ liegt, dann ist

$$f = g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ und } \deg(f) \leq 3. \text{ Wir haben:}$$

$$\dim U = \dim \text{im } g = \text{rk } g = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker g. \text{ Aber } g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ gdw. } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist, d.h. $\dim \ker g = 0$ und $\text{rk } g = 4$. Daraus folgt $\dim U = 4$.

c) Sei $f \in \mathbb{R}[x]$. Falls $f(2) \neq 0$, setzen wir $a := f(2)$. Dann gilt für $\tilde{f} := \frac{1}{a}f \in \mathbb{R}[x]$, dass $\tilde{f}(2) = \frac{1}{a}f(2) = 1$ gilt, d.h. $\tilde{f} \in M$ und $f = a\tilde{f}$ ist ein Vielfaches von $\tilde{f}$.

Falls nun $f(2) = 0$, dann ist $\hat{f} := f + 1 \in \mathbb{R}[x]$ so, dass $\hat{f}(2) = f(2) + 1 = 1$ gilt, d.h. $\hat{f} \in M$. Das Polynom 1 liegt auch in M . Dann ist $f = \hat{f} - 1$, d.h. f ist eine Differenz von Elementen von M .

Daraus folgt, dass M ganz $\mathbb{R}[x]$ erzeugt.

Alternativlösung:

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ liegt das Polynom $f_i := \left(\frac{1}{2}\right)^i x^i$ in M (da $f_i(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i = 1$). Ist nun $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ beliebig. Dann ist $f = \sum_{i=0}^n a_i 2^i f_i$; also ist f eine Linearkombination von Polynomen aus M .

Aufgabe 4.

a) Sei $v, v' \in U$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir schreiben v als $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a + 2b \end{pmatrix}$ und v' als $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ a' + 2b' \end{pmatrix}$ mit

$a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. Dann ist $rv + v' = \begin{pmatrix} ra + a' \\ rb + b' \\ r(a + 2b) + r(a' + 2b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra + a' \\ rb + b' \\ ra + a' + 2(rb + b') \end{pmatrix} \in U$.

b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von U , da ein Vektor der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a + 2b \end{pmatrix}$ auf genau eine Weise als Linearkombination dieser Vektoren geschrieben werden kann, nämlich, $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Sei $v \in U$. Wir schreiben v als $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a + 2b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $\langle v, w \rangle = a + 2b - (a + 2b) = 0$.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle v, w \rangle = 0$. Wir schreiben v als $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann ist $a + 2b - c = 0$, d.h. es gilt $c = a + 2b$ und damit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + 2b \end{pmatrix} \in U$.

d) Da $v \notin \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$ sind (laut Vorlesung) $u_1, \dots, u_{n-1}, v$ linear unabhängig.

Weil die n Vektoren l.u. in ein n -dimensional Vektorraum, die bilden eine Basis.

Daraus folgt, dass genau eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, mit $f(u_i) = 0$ und $f(v) = 1$.

e) Für $u \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle w', u \rangle = (w')^T u = Au = f(u)$.

Nach Definition von f gilt $U \subseteq \ker f$, und da f nicht die 0-Abbildung ist und $\dim U = n - 1$ folgt sogar $U = \ker f$.

Also gilt, für u in $\mathbb{R}^n$: $\langle w', u \rangle = f(u) = 0$ genau dann, wenn $u \in U$ ist.

Aufgabe 5.

a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 6 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 1)$ da $\lambda I - A$ eine untere Dreiecksmatrix ist.

b) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, nämlich, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$.

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z - 6x \end{pmatrix}$. Daraus folgt, dass:

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert 0 ist,

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert 1 ist,
- und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert -1 ist.

c) Die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, demnach ist A

diagonalisierbar: für $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt $A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $\text{rk}(A') = 2$ da $\dim \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = 2$ ist.

Wenn man eine Matrix mit einer invertierbaren Matrix multipliziert, ändert sich der Rang nicht. Also gilt $\text{rk } A = \text{rk}(SA'S^{-1}) = \text{rk}(A'S^{-1}) = \text{rk}(A') = 2$.