Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 1
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Sei $\ell :=$"$a_1x_1+\cdots+a_nx_n = b$" eine beliebige Gleichung von $\underline{L}$. Weil die Tupel $\underline{c}$, $\underline{d}$ und $\underline{e}$ Lösungen von $\underline{L}$ sind, sind sie insbesondere Lösungen von ℓ, das heißt, es gilt:

$$a_1c_1 + \cdots + a_nc_n = b,$$

$$a_1d_1 + \cdots + a_nd_n = b$$

und

$$a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = b.$$

Dann folgt

$$(a_1c_1 + \cdots + a_nc_n) + (a_1d_1 + \cdots + a_nd_n) - (a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = b + b - b = b$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_1(c_1 + d_1 - e_1) + a_2(c_2 + d_2 - e_2) + \cdots + a_2(c_n + d_n - e_n) = b,$$

das heißt, dass das Tupel $(c_1 + d_1 - e_1, \ldots, c_n + d_n - e_n)$ eine Lösung von ℓ ist.
Weil ℓ beliebig war, wissen wir, dass $(c_1 + d_1 - e_1, \ldots, c_n + d_n - e_n)$ eine Lösung von jeder Gleichung von $\underline{L}$ ist; das bedeutet genau, dass $(c_1 + d_1 - e_1, \ldots, c_n + d_n - e_n)$ eine Lösung von $\underline{L}$ ist.

Aufgabe 2. Wir werden die Koeffizientenmatrix in Normalform bringen. Wir schreiben Z_i für die i^{te} Zeile von diese Matrix.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftarrow Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 + 2Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftarrow \frac{1}{3} Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \leftarrow Z_3 - 2Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \leftarrow -Z_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Dann folgt, dass die eindeutige Lösung von diesem Gleichungssystem $(2, 1, 4)$ ist.

Aufgabe 3.

a) $b_0 = a_1 = 4$

$b_1 = a_{b_0} = a_4 = 2$

$b_2 = a_{b_1} = a_2 = 3$

$b_3 = a_{b_2} = a_3 = 5$

$b_4 = a_{b_3} = a_5 = 1$

$b_5 = a_{b_4} = a_1 = 4$

$b_6 = a_{b_5} = a_4 = 2$

b) Als erstes zeigen wir per Induktion, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 5-periodisch ist, das heißt, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $b_n = b_{n+5}$: wenn $n = 0$ oder 1 ist, folgt das aus a). Angenommen, dass $b_n = b_{n+5}$ gilt. Dann folgt $b_{n+1} = a_{b_n} = a_{b_{n+5}} = b_{n+6}$.

Danach gilt auch $b_{n+5a} = b_n$ fur jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede $a \in \mathbb{N}$. Natürlich ist 123456785 ein Vielfaches von 5, und dann haben wir

$$b_{123456789} = b_{123456785+4} = b_4 = 1.$$

Aufgabe 4.

a) i) Ja, z.B. $0x = 1$.

ii) Ja, z.B. $x = 1$.

iii) Nein: angenommen wir haben eine lineare Gleichung mit zwei *verschiedenen* Lösungen c und d. Dann ist nach Aufg. 1 $c + c - d$ ist auch eine Lösung. Weil $c \neq d$, ist auch $c + c - d$ nicht gleich c oder d; das heißt, es gibt eine dritte Lösung.

iv) Ja, z.B. $0x = 0$.

b) i) Ja, z.B. $0x + 0y = 1$.

ii) Nein: angenommen wir haben eine lineare Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ mit einer Lösung (c_1, c_2). Entweder $a_1 \neq 0$, und dann ist auch $(c_1 - \frac{a_2}{a_1}, c_2 + 1)$ eine Lösung, oder $a_2 \neq 0$ und $(c_1 + 1, c_2 - \frac{a_1}{a_2})$ ist auch eine Lösung, oder beide $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$; dann gilt: wenn $b = 0$ sind alle Paare $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ Lösungen, und wenn $b \neq 0$ ist, gibt es keine Lösung.

iii) Nein, wie a)iii).

iv) Ja, z.B. $x - y = 0$.