Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 10
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Sei f injektiv. Dann gilt $\ker(f) = \{0\}$. Seien $a_1, \dots, a_n \in K$ sodass $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$ ist. Dann $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = f(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$, d.h., $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \ker(f)$. Aber $\ker(f) = \{0\}$, daraus folgt $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$, und das bedeutet, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.

Angenommen nun, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind. Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \ker(f)$, d.h., $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = 0$. Aber dann gilt $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = f(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Weil $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, müssen alle von $a_1, \dots, a_n$ null sein, d.h., $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$ und f ist injektiv.

b) Wir zeigen als erstes, dass $\operatorname{im} f = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$ gilt. Daraus folgt einfach, dass f surjektiv ist gdw. $\operatorname{im} f = V$ gdw. $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K = V$.

Sei $v \in \operatorname{im} f$. Dann existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $v = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})$. Aber dann gilt $v = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, d.h., v liegt in $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$.

Sei nun $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$. Dann existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Aber dann gilt $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})$, d.h., $v \in \operatorname{im} f$.

Aufgabe 2. Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $w_1, \ldots, w_n \in W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

„$\Rightarrow$“: Angenommen, dass $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = V$. Sei nun $w \in W$. Weil f surjektiv ist, existiert $v \in V$ mit $f(v) = w$. Weil die v_i bilden einen Erzeugendensystem von V, kann v als $\sum_{i=1}^n a_i v_i$ geschrieben sein. Dann gilt $w = f(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$, d.h., $w \in \langle w_1, \ldots, w_n \rangle_K$ und $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle_K = W$.

„$\Leftarrow$“: Angenommen nun, dass $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle_K = W$. Dann betrachten wir $f^{-1}\colon W \to V$. f^{-1} ist ein Isomorphismus, der schickt w_i nach v_i. Aus (a) folgt, dass $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = V$.

Aufgabe 3.

a) Es gibt genau eine solche Abbildung, weil $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

b) Es gibt keine solche Abbidlung, weil $3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ aber $3f_2(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) \neq f_2(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}) + f_2(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$, d.h., eine solche Abbildung kann nicht linear sein.

c) Es gibt mehrere solche Abbildungen, z.B., wir setzen $f_3(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ für eine beliebige $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f_3(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = 0$, d.h., $\ker(f) \neq \{0\}$ und f_3 ist nicht injektiv.

d) Es gibt keine solche Abbildung, weil $f_4(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) \in \left\{ \begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ liegen muss, und das impliziert, dass $f_4(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist und daraus folgt, dass f_4 nicht linear sein kann.

e) Es gibt mehrere solche Abbildungen, z.B., wir setzen $f_6(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $f_6(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$ beliebig. Dann gilt $f_6(\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}) = xf_6(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + f_6(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = f_6(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$, d.h., $f_6(\left\{ \begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}) = \left\{ f_6(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) \right\}$.

Aufgabe 4.

a) Wir haben $v_3 - v_1 = 3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 44\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in U$, d.h., $\overline{v_3} = \overline{v_1}$. Wir haben auch $v_2 - v_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in U$ und $v_4 - v_5 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 30\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, d.h., $\overline{v_2} = \overline{v_6}$ und $\overline{v_4} = \overline{v_5}$.

b) Wir haben $\overline{v_6} = \overline{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}}$.

c) Sei $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wir haben $\overline{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} - c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{b}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}a-\frac{b}{2}\\0\\0\end{pmatrix}}$, d.h., $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ hat mindestens einen Repräsentanten der Form $\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}$.

Seien nun $r, s \in \mathbb{R}$ mit $\overline{\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}s\\0\\0\end{pmatrix}}$, d.h., mit $\begin{pmatrix}r-s\\0\\0\end{pmatrix} \in U$. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\begin{pmatrix}r-s\\0\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Dann gilt $r - s = a$, $0 = 2a$ und $0 = b$; aber daraus folgt $a = 0$ und $b = 0$, und am Ende $r - s = 0$, d.h., jeder Vektor aus $\mathbb{R}^3/U$ hat genau einen Repräsentanten der Form $\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix}$.

d) Das folgt einfachlich aus c).

e) $\overline{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$.