

Linear Algebra I
Übungsblatt 11
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Weil $\ker f$ ein Untervektorraum von V ist, ist auch $k := \dim \ker f$ endlich, und wir können eine Basis $u_1, \dots, u_k$ von $\ker f$ nehmen.

Wir setzen auch $\ell := \dim \operatorname{im} f$ und nehmen $w_1, \dots, w_\ell$ eine Basis von $\operatorname{im} f$. Für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ nehmen wir $v_i \in V$ mit $f(v_i) = w_i$, das ist möglich da $w_i \in \operatorname{im} f$ liegt.

Wir werden jetzt zeigen, dass $v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_k$ eine Basis von V bilden.

Seien $a_1, \dots, a_\ell$ und $b_1, \dots, b_k$ Skalare, sodass $\sum_{i=1}^\ell a_i v_i + \sum_{j=1}^k b_j u_j = 0_V$ gilt. Dann haben wir $f(\sum_{i=1}^\ell a_i v_i + \sum_{j=1}^k b_j u_j) = f(0_V) = 0_W$. Weil f linear ist, gilt $f(\sum_{i=1}^\ell a_i v_i + \sum_{j=1}^k b_j u_j) = \sum_{i=1}^\ell a_i f(v_i) + \sum_{j=1}^k b_j f(u_j) = \sum_{i=1}^\ell a_i w_i$ – erinnern Sie, dass alle u_j in $\ker f$ liegen. $w_1, \dots, w_\ell$ bilden eine Basis von $\operatorname{im} f$, insbesondere sind sie linear unabhängig. Aus $\sum_{i=1}^\ell a_i w_i = 0_W$ folgt, dass alle a_i gleich null sind.

Jetzt haben wir $\sum_{i=1}^\ell a_i v_i + \sum_{j=1}^k b_j u_j = \sum_{j=1}^k b_j u_j = 0_V$. Weil $u_1, \dots, u_k$ eine Basis von $\ker f$ bilden, sind sie auch linear unabhängig, und alle a_i müssen gleich null sein. Weil die Skalare $a_1, \dots, a_\ell$ und $b_1, \dots, b_k$ alle null sind, wissen wir, dass $v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_k$ linear unabhängig sind.

Zuletzt gilt $\dim V = \operatorname{rk} f = \dim \ker f = \ell + k$. Die Anzahl von Elementen in der linear unabhängigen Familie $v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_k$ ist genau gleich der Dimension von V , d.h., $v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_k$ muss eine Basis von V sein.

Jetzt ergänzen wir $w_1, \dots, w_\ell$ nach einer Basis $w_1, \dots, w_n$ von W , und wir haben $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ und $f(u_j) = 0_W$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$, d.h., die Matrix von f in den Basen $v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_k$ und $w_1, \dots, w_n$ hat genau die Form, die wir wollen.

Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{im} A &= \left\{ \begin{pmatrix} a+5b+c+d \\ a+5b \\ a+5b \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ \text{und } \ker A &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} a+5b+c+d \\ a+5b \\ a+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -5x \\ x \\ y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \\ &\left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}. \text{ Wir haben } \operatorname{rk} A = 2, \dim \ker A = 2 \text{ und } \dim \mathbb{R}^4 = 4, \text{ und} \\ &2 = 4 - 2. \end{aligned}$$

- b) Es gilt $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - \dim \mathbb{R}^3 \leq \operatorname{rk} BA \leq \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$, oder $1 \leq \operatorname{rk} BA \leq 2$, d.h., $\operatorname{rk} BA$ kann 1 oder 2 sein.

c) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ funktionieren.

d) Wir haben $\text{rk } A + \text{rk } C - \dim \mathbb{R}^3 \leq \text{rk } CA$, oder $\text{rk } C \leq \text{rk } CA + \dim \mathbb{R}^3 - \text{rk } A = 0 + 3 - 2 = 1$. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ funktioniert.

Aufgabe 3. Wir haben $\text{rk } f = \dim V - \dim \ker f$.

- a) f ist surj. gdw. $\text{im } f = W$ gdw. $\text{rk } f = \dim W$. Wenn $\dim W = \dim V$ ist, gilt $\text{rk } f = \dim W$ gdw. $\text{rk } f = \dim V$ gdw. $\dim \ker f = 0$ gdw. f inj. ist.
- b) $\text{rk } f$ ist immer kleiner als (oder gleich) $\dim W$. Wenn $\dim W < \dim V$ ist, gilt $\text{rk } f < \dim V$, d.h., $\dim V - \dim \ker f < \dim V$ und $\dim \ker f > 0$: f ist nicht injektiv.
- c) $\text{rk } f = \dim V - \dim \ker f \leq \dim V$. Wenn $\dim V < \dim W$ ist, gilt $\text{rk } f < \dim W$, d.h., $\text{im } f \neq W$ und f ist nicht surjektiv.

Aufgabe 4.

- a) $1, x, x^2, x^3, \dots$ sind linear unabhängig.
- b) Seien $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i, Q = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ und $c \in \mathbb{R}$. Wir haben $cP + Q = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (ca_i + b_i)x^i$ und $h(cP + Q) = \sum_{i=1}^{\max(n,m)} (ca_i + b_i)ix^{i-1}$. Es gilt auch $ch(P) + h(Q) = c \sum_{i=1}^n ca_i ix^{i-1} + \sum_{i=1}^m cb_i ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{\max(n,m)} (ca_i + b_i)ix^{i-1}$, d.h., h ist linear.
- c) $\ker h = \{a \in \mathbb{R}[x] \mid a \in \mathbb{R}\}$: h ist nicht injektiv.
- d) Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. Dann ist $Q = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$ ist ein Element von $\mathbb{R}[x]$ mit $h(Q) = P$, d.h., $P \in \text{im } h$ und $\text{im } h = \mathbb{R}[x]$: h ist surjektiv.

Aufgabe 5.

a) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $E_1^{-1} = E_1$.

b) $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.