Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 12
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Wir zeigen die folgende Aussage per Induktion auf n:

$$\text{Wenn } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n} \text{ ist, ist } \det(A) = a_{11}\dots a_{nn}.$$

Falls $n = 1$, haben wir $\det(a_{11}) = a_{11}$.

Angenommen, dass die Aussage für eine $n \geqslant 1$ gilt. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \in$ $K^{n+1\times n+1}$. Dann ist die Entwicklung nach der $n+1$-ten Zeile von A gleich

$$\sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+1+l} 0 \det(A_{n+1,l}) + (-1)^{2(n+1)} a_{n+1,n+1} \det(A_{n+1,n+1}) = a_{n+1,n+1} \det(A_{n+1,n+1}).$$

Aber $A_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ gilt, und per Induktion haben wir $\det(A_{n+1,n+1}) =$ $a_{11}\dots a_{nn}$. Zuletzt gilt $\det(A) = a_{11}\dots a_{nn} a_{n+1,n+1}$.

Aufgabe 2.

a)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

c) $\det A = 3$

d) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Aufgabe 3.

a) Z.z: Für alle $A, A' \in K^{\ell\times n}$, alle $B, B' \in K^{n\times m}$ und alle $r, r' \in K$, gilt:

- $(rA + A')B = r(AB) + A'B$, und
- $A(rB + B') = r(AB) + AB'$.

b) Lemma 4.1.8 (c) und (d).

Aufgabe 4.

a) Weil f multilinear ist, haben wir

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}) &= f(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}) \\ &= 2f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}) \\ &= 2f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}) \\ &= 4f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}) \\ &= 4f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) \\ &= 8f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) \\ &= 8. \end{aligned}$$

b) Sei $A = (S_1|S_2|S_3)$ mit spalten $S_i \in K^3$, dann gilt $rA = (rS_1|rS_2|rS_3)$ und $\det(rA) = \det(rS_1|rS_2|rS_3) = r^3 \det A$.

Aufgabe 5.

- Falls $r < 2$ gibt es eine linear abhängigkeit zwischen die Spalten von A; d.h., d muss 0 sein. z.B $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ hat $r = 0$ und $d = 0$, und $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ hat $r = 1$ und $d = 0$.
- Falls $r = 2$ gibt es keine linear abhängigkeit zwischen die Spalten von A; d.h., d muss $\neq 0$ sein. z.B $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & d\end{pmatrix}$ hat $r = 2$ und d beliebig (aber nicht 0).

Dann haben wir:

$$\{(r,d) \in [0,2]^2 \mid \exists A \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ \operatorname{rk} A = r,\ \det A = d\} = \{(2,d) \mid d \in (0,2]\} \cup \{(0,0),(1,0)\}$$