Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 13
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von h. Per Definition existiert $(v,w) \in V \times W \setminus \{(0_V, 0_W)\}$ mit $h(v,w) = \lambda \cdot (v,w)$. Aber $h(v,w) = (f(v), g(w))$ und $\lambda \cdot (v,w) = (\lambda v, \lambda w)$, d.h., wir haben $f(v) = \lambda v$ und $g(w) = \lambda w$. Weil (v,w) nicht null ist, ist entweder v oder w nicht null; d.h., λ ist entweder ein Eigenwert von f oder von g.

Sei nun $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Per Definition existiert $v \in V \setminus \{0_V\}$ mit $f(v) = \lambda v$. Aber dann gilt $h(v, 0_W) = (f(v), 0_W) = (\lambda v, 0_W) = \lambda \cdot (v, 0_W)$, und $(v, 0_W) \neq (0_V, 0_W)$ weil $v \neq 0_V$ ist. D.h., $(v, 0_W)$ ist ein Eigenvektor von h und sein Eigenwert ist λ.

Wenn $\lambda \in K$ ein Eigenwert von g ist, existiert $w \in W \setminus \{0_W\}$ mit $g(w) = \lambda w$ und analog ist dann $(0_V, w)$ ein Eigenvektor von h mit Eigenwert λ.

Aufgabe 2.

a)

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
$1 \mapsto 3$	$1 \mapsto 3$	$1 \mapsto 3$	$1 \mapsto 3$	$1 \mapsto 4$	$1 \mapsto 4$
$2 \mapsto 1$	$2 \mapsto 1$	$2 \mapsto 2$	$2 \mapsto 4$	$2 \mapsto 1$	$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 2$	$3 \mapsto 4$	$3 \mapsto 1$	$3 \mapsto 1$	$3 \mapsto 3$	$3 \mapsto 1$
$4 \mapsto 4$	$4 \mapsto 2$	$4 \mapsto 4$	$4 \mapsto 2$	$4 \mapsto 2$	$4 \mapsto 2$

b) $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_4) = \operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_3) = \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1$, da $\det A = a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

Aufgabe 3.

a)
$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A_\sigma = B_\sigma^T$.

c) Sei $s\colon S_n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $S_n := \operatorname{Sym}(\{1, \ldots, n\})$ sodass für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ ist. Insbesondere haben wir $\det(B_\sigma) = s(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = s(\sigma)$, d.h., die Abbildung s muss genau gleich sgn sein.

Aufgabe 4.

a) $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$, also die Eingenwerte sind ± 1.

b) $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, d.h., $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor mit Eigenwert 1; und $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$, d.h., $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren mit Eigenwert -1.

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

c) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $Av = \lambda v$. Dann $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A v = \lambda^2 v$. Per Induktion gilt $A^n v = \lambda^n v$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $A^{2025} v_1 = v_1$, $A^{2025} v_2 = -v_2$ und $A^{2025} v_3 = -v_3$.

Aufgabe 5.

a) $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n$, daraus folgt, dass die Eigenwerte von A alle 0 sind.

b) Die Menge aller Eigenvetoren ist gleich $\ker A \setminus \{0\}$.

c) $\operatorname{rk} A = 1$, da $\dim \ker A = n-1$, so existiert keine Basis von $\mathbb{R}^n$, die nur Eigenvektoren enthält.